AP 1

Suites récurrentes d'ordre 1 - Suites implicites

Suites récurrentes d'ordre 1

Exercice 1

On étudie la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{5}{2} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{4}{1+u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.
2. Calculer les premiers termes de la suite. Est-elle monotone ?
3. Étudier la fonction $f(x) = 1 + \dfrac{4}{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

   Représenter f et les premiers termes de la suite.
4. Déterminer les limites possibles de la suite (u_n).
5. Soient (v_n) et (w_n) les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) Déterminer la fonction g telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$.
   (b) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer le signe de $g(x) - x$.
   Montrer que les deux intervalles $[0, \sqrt{5}[$ et $[\sqrt{5}, +\infty[$ sont stables par g.
   (c) En déduire que les deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes. Vers quelle limite ?
   (d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \text{ tel que } u_0 > 0 \text{ et } u_0 \neq 1, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{1+2u_n^2}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq 3$ et $u_n \neq 1$.
2. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. En déduire qu'elles sont convergentes.
3. Montrer que si la suite (u_n) convergeait, sa limite ne pourrait être que 1.
4. On suppose que (u_n) converge vers 1.

   En considérant la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{3}{1+2x^2}$ en 1, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}-1}{u_n - 1}$.
5. En déduire que la suite (u_n) diverge et conclure.

Suites implicites

Exercice 3

Pour tout entier $k \geq 2$, on considère la fonction :

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{(\ln(x))^k}{x-1} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1. Étude des fonctions f_k :
   (a) Soit $k \geq 2$. Démontrer que f_k est dérivable pour $x \neq 1$ et déterminer sa dérivée.
   (b) Démontrer que f_k est dérivable en 1 et déterminer $f_k'(1)$.
   (c) Soit $\varphi_k(x) = k(x-1) - x\ln(x)$. Étudier les variations de φ_k.
   (d) Démontrer que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1, +\infty[$ notée a_k.
   (e) Donner le tableau de variation de f_k.
   On séparera les cas k pair et $k \geq 2$ et k impair et $k \geq 3$.
2. Étude asymptotique de la suite $(a_k)_{k\geq 2}$:
   (a) Démontrer que pour tout $k \geq 2$, $e^{k-1} \leq a_k \leq e^k$.
   En déduire la limite de $(a_k)_{k\geq 2}$.
   (b) Pour tout $k \geq 2$, on pose : $a_k = e^k(1 + b_k)$.
   Démontrer que b_k vérifie l'équation : $-ke^{-k} = (1 + b_k)\ln(1 + b_k)$.
   (c) Démontrer que $\ln(1 + b_k) \geq -ke^{1-k}$.
   En déduire la limite de la suite (b_k) et $b_k \sim -ke^{-k}$.
   (d) En déduire que $a_k = e^k - k + o(k)$ lorsque $k \to +\infty$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x)$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n.
2. (a) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
   (d) Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$.
   (b) Établir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$ et en déduire que : $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$.
   (c) Montrer enfin que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.
4. Pour les 5/2 - Donner la nature des séries de termes généraux v_n et v_n^2.
