AP 11

Lois de Panjer

Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilité composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine.
On étudie le modèle suivant :

- Le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurance sur une période donnée est une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$;
- Les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. On suppose que les variables U_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées, et sont indépendantes de N ;
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$, et X_0 est la variable certaine de valeur 0 ;
- La charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire X définie par :
$$X = \sum_{k=1}^{N} U_k$$
et l'on précise que $X = X_0 = 0$ si N prend la valeur 0. On dit que X suit une loi composée.
- Pour tout entier naturel j, on pose $p_j = P(N = j)$, $q_j = P(U_1 = j)$ et $r_j = P(X = j)$.

Partie I - Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent une loi de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel de l'intervalle $]0; 1[$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la loi de X_n ?
2. Pour tout entier naturel j, établir : $r_j = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X_n = j)p_n$.
3. Dans cette question 3, on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres m, entier naturel, et π, réel dans $]0, 1[$. Soit j un entier naturel.
   (a) Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.
   (b) Établir : si $j \in [\![0; m]\!]$, $r_j = \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$.
   (c) Vérifier que, pour tous entiers j, n, m tels que $0 \leq j \leq n \leq m$, $\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}$.
   (d) En déduire, pour tout $j \in [\![0; m]\!]$: $r_j = \binom{m}{j}(p\pi)^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \Big[(1-p)\pi\Big]^{\ell} (1-\pi)^{m-j-\ell}$.
   (e) Montrer finalement que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de m, p et π.

4. On suppose dans cette question 4 que N suit la loi de Poisson de paramètre λ, réel strictement positif.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel j, on a :
   $$r_j = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^j}{j!}\sum_{n=j}^{+\infty}\frac{1}{(n-j)!}\Big[\lambda(1-p)\Big]^{n-j}.$$

   (b) En déduire que X suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de p et λ.

Partie II - La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout y réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\binom{y}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(y-i)$, et $\displaystyle\binom{y}{0} = 1$.

5. *La formule du binôme négatif.*
   Soit c un réel strictement positif, et x un réel de $[0;1[$.

   (a) Pour tout entier naturel n, on pose $\displaystyle I_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}}\,\mathrm{d}t$.

      i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle I_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{c+n+1}{n+1}I_{n+1}$.

      ii. Montrer par récurrence :
      $$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n}\binom{c+k-1}{k}x^k + c\binom{c+n}{n}I_n.$$

   (b) Vérifier que pour tout $t \in [0,x]$: $\displaystyle 0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$.

   En déduire l'encadrement : $\displaystyle 0 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$.

   (c) i. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{k}\right)$.

      ii. Montrer que pour tout réel t positif, $\ln(1+t) \leq t$.

      iii. Établir, pour tout entier naturel $k \geq 2$: $\displaystyle\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.

      En déduire : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.

      iv. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\ln\left[\binom{c+n}{n}\right] \leq c(1+\ln(n))$.

      En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\binom{c+n}{n}x^{n+1} = 0$.

   (d) En conclure que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\binom{c+k-1}{k}x^k$ est convergente, et établir la formule du binôme négatif :
   $$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{c+k-1}{k}x^k = \frac{1}{(1-x)^c}.$$

6. Soit p un réel de $]0;1[$, et r un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $\displaystyle p_k = \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^r$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres r et p.

7. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètre 1 et p, reconnaître la loi de $Y+1$.

8. *Espérance et variance.* Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres r réel strictement positif et $p \in]0,1[$.

   (a) Montrer : pour tout entier $k \geq 1$, $k\binom{r+k-1}{k} = r\binom{r+k-1}{k-1}$.

   (b) Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $E(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p}$.

   (c) Montrer que Z admet une variance et que l'on a : $V(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.
   On pourra commencer par calculer l'espérance de $Z(Z-1)$.

Partie III - Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème ; la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = P(N=k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels a et b, avec $a < 1$ et $a+b > 0$, tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}.$$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a,b)$.

9. *Détermination des lois de Panjer.*

   (a) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a : $p_k = p_0 \displaystyle\prod_{i=1}^{k}\left(a + \frac{b}{i}\right)$.

   (b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$.
   Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b.

   (c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

      i. Montrer qu'il existe un unique entier naturel r, tel que : $\forall k > r$, $p_k = 0$ et $\forall k \leq r$, $p_k \neq 0$.
      On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.

      ii. Montrer : $b = -a(r+1)$.

      iii. Établir que pour tout $k \in [\![0; r]\!]$, $p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0$.
      En déduire que $p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^r}$.

      iv. En conclure que N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres en fonction de a et b.

   (d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

      i. Montrer que pour tout entier naturel k, on a $p_k = \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k p_0$.

      ii. En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b.

10. Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par : $E(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ et $V(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$.

Partie IV - L'algorithme de Panjer

- On reprend les notations de l'introduction du sujet et de la partie III.
- Si A est un évènement et Y une variable aléatoire, on note, si elle existe, $E_A(Y)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant A.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de q_0 puis établir que $r_0 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q_0^n p_n$.

12. Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

    (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $E_{(X_n=j)}(X_n)$? en déduire : $E_{(X_n=j)}(U_1) = \dfrac{j}{n}$.

    (b) Établir : $r_j = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n = j)\left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right) P(X_n = j) p_{n-1}$.

    (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

    $$E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right) P(X_n = j) = \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) P(U_1 = i) P(X_{n-1} = j - i).$$

    (d) En conclure : $r_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i}$, puis :

    $$r_j = \frac{1}{1 - aq_0} \left(\sum_{i=1}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i} \right).$$

    Cette formule permet de calculer récursivement les nombre r_j et ainsi de déterminer la loi de X.

13. *Des exemples d'application.*

    (a) Dans cette question, les variables U_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.

    i. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $r_j = \dfrac{p}{1 - a + ap}\left(a + \dfrac{b}{j}\right) r_{j-1}$.
    En déduire que X suit une loi de Panjer.

    ii. Retrouver les résultats des questions 3 et 4 de la partie I.

    (b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, rappelons que cela entraîne que N suit la loi de Poisson de paramètre b.
    Soit p un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

    i. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que la famille de nombre $(q_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ définie par $q_i = \alpha \dfrac{p^i}{i}$ définisse une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (*loi logarithme discrète*). On pose $q_0 = 0$.
    On suppose que les variables U_k suivent cette loi de probabilité.

    ii. Montrer que pour tout entier $j \geq 1$, on a : $r_j = \dfrac{b\alpha}{j} \displaystyle\sum_{i=1}^{j} p^i r_{j-i}$.

    iii. En utilisant un changement d'indice, établir pour tout $j \geq 2$: $r_j = \left(p + \dfrac{p(b\alpha - 1)}{j}\right) r_{j-1}$, puis montrer que cette égalité est encore vérifiée pour $j = 1$.

    iv. Conclure que X suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de b, α et p.