AP 13

Applications linéaires

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On définit l'application :

$$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1},\ P \mapsto \varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)).$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Montrer que φ est un isomorphisme.
3. En déduire que pour tout $(b_0, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $Q(a_i) = b_i$.
4. (a) Écrire la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
   (b) En déduire que la matrice suivante (appelée matrice de Vandermonde)
   $$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$
   est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

Exercice 2

Soit f un endomorphisme non nul d'un espace vectoriel E de dimension 3 tel que $f \circ f = 0$.

1. Montrer que $Im(f) \subset Ker(f)$.
2. En déduire que $dim(Ker(f)) \geq 2$.
3. Conclure que $rg(f) = 1$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f et g deux endomorphisme de E.

1. Montrer que : $Im(f \circ g) \subset Im(f)$.
2. Montrer que : $Ker(g) \subset Ker(f \circ g)$.
3. En déduire que : $rg(f \circ g) \leq \min(rg(f), rg(g))$.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :

1. $g \circ f = 0 \Leftrightarrow Im(f) \subset Ker(g)$.
2. $Ker(g \circ f) = Ker(f) \Leftrightarrow Im(f) \cap Ker(g) = \{\vec{0}\}$.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Suite des noyaux itérés :
   (a) Démontrer que : $\forall i \in \mathbb{N}$, $Ker(f^i) \subset Ker(f^{i+1})$.
   (b) Dans cette question, on suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que : $Ker(f^r) = Ker(f^{r+1})$.
   Démontrer que : $\forall i \geq r$, $Ker(f^i) = Ker(f^{i+1})$.
   (c) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note : $d_i = dim(Ker(f^i))$.
      i. Montrer que la suite $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est monotone.
      ii. En procédant par l'absurde, démontrer qu'il existe $r \in [\![0, n]\!]$ tel que : $d_r = d_{r+1}$.
      iii. En déduire que la suite $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
2. Suite des images itérés :
   (a) Démontrer que : $\forall j \in \mathbb{N}$, $Im(f^{j+1}) \subset Im(f^j)$.
   (b) Dans cette question, on suppose qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que : $Im(f^{s+1}) = Im(f^s)$.
   Démontrer que : $\forall j \geq s$, $Im(f^{j+1}) = Im(f^j)$.
   (c) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note $m_j = dim(Im(f^j))$.
      i. Démontrer que la suite $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est monotone.
      ii. Démontrer que : $m_{r+1} = m_r$ (où r a été défini à la question 1.(c)iii.).
      iii. En déduire que la suite $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Exercice 6

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. On suppose que f est nilpotent d'indice k, c'est-à-dire que $f^{k-1} \neq 0$ et $f^k = 0$. On souhaite prouver dans cette question que $k \leq 3$.
   Pour cela, on va faire un raisonnement par l'absurde et supposer que $k > 3$.
   (a) Prouver qu'un endomorphisme nilpotent n'est pas bijectif.
   (b) En déduire que $dim(Ker(f)) \neq 0$.
   (c) A l'aide de l'exercice précédent, démontrer par l'absurde que :
   $$Ker(f) \neq Ker(f^2) \text{ et } Ker(f^2) \neq Ker(f^3).$$
   (d) En considérant la dimension des noyaux ci-dessus, montrer que $f^3 = 0$. Conclure.
2. On suppose maintenant que f est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.
   (a) Justifier qu'il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \notin Ker(f^2)$.
   (b) Justifier que $\mathscr{B} = (x, f(x), f^2(x))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice N de f dans la base $\mathscr{B}$.
   (d) Démontrer que $Im(f^2) = Ker(f)$.
