AP 13

Variables aléatoires à densité

Exercice 1 (ECRICOME)

Après une enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unité de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Rappeler la définition d'une densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X.
2. (a) Utiliser la question précédente pour vérifier que f est bien une densité de probabilité.
   (b) Montrer que T admet une espérance que l'on déterminera.
   Quel est le temps moyen de passage en caisse ?
3. (a) Démontrer que la fonction de répartition de T, notée F_T, est définie par :
   $$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1-(x+1)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
   (b) Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités de temps sachant qu'il est supérieur à une unité est égale à $\dfrac{2e-3}{2e}$.
4. Un jour donné, trois clients A, B, C se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variables aléatoires T_A et T_B correspondant au temps de passage en caisse de A et de B sont indépendantes.
   (a) M désignant le temps d'attente du client C, exprimer M en fonction de T_A et de T_B.
   (b) Montrer que la fonction de répartition F_M de la variable aléatoire M est donnée par :
   $$F_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1-(1+x)^2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$
   (c) Prouver que M est une variable à densité et expliciter une densité de M.

Exercice 2 (EDHEC)

Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On désigne par p un réel de $]0,1[$.
On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V, telles que U suit la loi uniforme sur $[-3,1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1,3]$.
On considère également une variable aléatoire Z, indépendante de U et V, dont la loi est donnée par :

$$P(Z=1) = p \quad \text{et} \quad P(Z=-1) = 1-p.$$

Enfin, on note X la variable aléatoire, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) \text{ si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) \text{ si } Z(\omega) = -1 \end{cases}$$

Autrement dit :

$$X = \begin{cases} U \text{ si } Z = 1 \\ V \text{ si } Z = -1 \end{cases}$$

On note F_X, F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V.

1. Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x.
2. (a) Établir, grâce au système complet d'événements $((Z=1),(Z=-1))$, que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = pF_U(x) + (1-p)F_V(x).$$
   (b) Vérifier que $X(\Omega) = [-3,3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas :
$$x < -3, \quad -3 \leq x \leq -1, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad x > 3.$$
   (c) On admet que X est une variable à densité.
   Donner une densité f_X de la variable aléatoire X.
   (d) Établir que X admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$, puis les déterminer.
3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.
   (a) Vérifier que l'on a : $X = U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}$.
   (b) Déduire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $E(X)$.
   (c) En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $E(X^2)$.
4. (a) Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
   Déterminer la loi de $2T-1$.
   (b) On rappelle que `rd.uniform(a,b)` et `rd.binomial(1,p)` sont des commandes `Python` permettant de simuler respectivement une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[a,b]$ et une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
   Écrire des commandes `Python` permettant de simuler U, V, Z, puis X.

Exercice 3 (ESSEC - Une propriété limite des lois de Pareto)

Question préliminaire

1. Soit g une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles.
   (a) Montrer que pour tout α et β dans I tels que $\alpha < \beta$,
$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta g(t)\,dt = \int_0^1 g\big(\alpha + (\beta-\alpha)x\big)\,dx.$$
   (b) Soit a, b, c, d dans I tels que $a < c < d < b$.
   On suppose g décroissante sur I, établir l'encadrement :
$$\frac{1}{b-c}\int_c^b g(t)\,dt \leq \frac{1}{d-c}\int_c^d g(t)\,dt \leq \frac{1}{d-a}\int_a^d g(t)\,dt.$$

Partie I - Partie fractionnaire d'une variable à densité

Pour tout réel x positif ou nul :

- on note $\lfloor x \rfloor$ la *partie entière* de x. On rappelle qu'il s'agit de l'unique entier naturel n qui vérifie l'encadrement : $n \leq x < n+1$.
- on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, que l'on appelle la *partie fractionnaire* de x.

Par exemple, si $x = 12,34$, alors $\lfloor x \rfloor = 12$ et $\{x\} = 0,34$.
Dans cette partie, X désigne une variable aléatoire à valeurs réelles admettant une densité f qui vérifie les propriétés :

- f est nulle sur $]-\infty, 0[$;
- la restriction de f à $[0, +\infty[$ est continue et décroissante.

On pose $M = f(0)$, c'est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
Soit $Y = \{X\} = X - \lfloor X \rfloor$, la variable aléatoire égale à la partie fractionnaire de X.
On note F_Y la fonction de répartition de Y.

2. Que vaut $F_Y(y)$ lorsque $y < 0$? Que vaut $F_Y(y)$ lorsque $y \geq 1$?

   On justifiera les réponses.

3. Justifier l'égalité entre événements : $(Y = 0) = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X = n)$.

   En déduire : $F_Y(0) = 0$.

4. Soit y un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

   (a) Montrer l'égalité : $F_Y(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+y} f(t)\,dt$.

   (b) Montrer, en utilisant la question préliminaire, les inégalités :

   - Pour tout n entier naturel, $\displaystyle\int_n^{n+y} f(t)\,dt \geq y \int_n^{n+1} f(t)\,dt$.
   - Pour tout n entier naturel non nul, $\displaystyle\int_n^{n+y} f(t)\,dt \leq y \int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\,dt$.

   (c) En déduire : $y \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \leq F_Y(y) \leq \int_0^y f(t)\,dt + y \int_y^{+\infty} f(t)\,dt$, puis l'encadrement

   $$y \leq F_Y(y) \leq y + M.$$

Partie II - Premier chiffre significatif d'une variable de Pareto

Pour tout réel λ strictement positif, on définit la fonction g_λ sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_\lambda : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x^{\lambda+1}} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. Montrer que pour tout réel λ strictement positif, g_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ (loi dite *de Pareto*).

   Dans toute la suite, on note Z_λ une variable aléatoire admettant g_λ pour densité.

6. Déterminer la fonction de répartition G_λ de Z_λ.

7. On note ln la fonction *logarithme népérien*, et log la fonction *logarithme décimal*.

   Cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ par : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ pour tout réel x strictement positif.

   On pose $X_\lambda = \log(Z_\lambda)$, et on note F_λ la fonction de répartition de X_λ.

   (a) Établir, pour tout réel x, l'égalité : $F_\lambda(x) = G_\lambda(10^x)$.

   (b) En déduire que X_λ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre en fonction de λ.

8. On pose $Y_\lambda = \{X_\lambda\}$, la partie fractionnaire de X_λ.

   Montrer, en utilisant les résultats de la partie I, que pour tout réel y de l'intervalle $]0, 1[$:

   $$\lim_{\lambda \to 0^+} P(Y_\lambda \leq y) = y.$$

   En déduire que, lorsque λ tend vers 0, Y_λ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

9. Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on note $\alpha(x)$ le premier chiffre dans l'écriture décimale de x. C'est un entier de l'intervalle $[\![1,9]\!]$.

   Par exemple, $\alpha(50)=5$ et $\alpha(213,43)=2$.

   (a) Pour tout $k\in[\![1,9]\!]$, montrer l'équivalence :

   $$\alpha(x)=k \quad \Leftrightarrow \quad \big\{\log(x)\big\}\in\big[\log(k),\log(k+1)\big[.$$

   (b) On note $C_\lambda=\alpha\big(Z_\lambda\big)$ la variable aléatoire prenant comme valeur le premier chiffre de Z_λ.

   Montrer, pour tout $k\in[\![1,9]\!]$, $\displaystyle\lim_{\lambda\to0^+}P(C_\lambda=k)=\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

   Cette loi limite obtenue pour le premier chiffre de Z_λ est appelée *loi de Benford*.
