AP 15

Applications linéaires

Exercice 1 (ECRICOME)

Dans cet exercice, on désigne par $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit a un réel. On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie I - Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M, puis calculer $(M - I_3)^2$.

2. En déduire l'unique valeur propre possible de M.

3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie II - Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de M, et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.

5. Démontrer que M n'est pas inversible.

6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie III - Étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.
On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M.
Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

7. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.

8. Calculer $f(u)$, $f(v)$.

9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.

10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$, que l'on notera T.

11. Déterminer les valeurs propres de T et une base des sous-espaces propres.

12. La matrice T est-elle diagonalisable ? Même question pour M ?

Exercice 2 (EDHEC)

On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire. On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   On considère une matrice A fixée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ associe :
$$f(M) = \left({}^tA\right) M + MA$$

2. (a) Soit M une matrice de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
   (b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

   Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

4. (a) Calculer $f(J), f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.
   (b) En déduire une base de $Im(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$.
   (c) Déterminer la dimension de $Ker(f)$ puis en donner une base.

5. (a) Écrire la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) Quelles sont les valeurs propres de F ?
   (c) Montrer que, si F est diagonalisable, alors $F^2 = -F$.
   (d) Que peut-on en conclure ?

Exercice 3 (ESSEC)

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On rappelle qu'un élément A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est colinéaire à I s'il existe un réel λ tel que $A = \lambda I$.
On définit les deux applications suivantes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$:

- l'application **déterminant** notée d et définie par :
$$\forall A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ d(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1},$$
- l'application **trace** notée t et définie par :
$$\forall A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ t(A) = a_{1,1} + a_{2,2}.$$

1. Soit A et B deux éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Calculer $d(2I)$. En déduire que l'application d n'est pas linéaire.
   (b) Montrer que pour tout A, $d({}^tA) = d(A)$.
   (c) Établir la formule : $d(AB) = d(A) \times d(B)$.
   (d) En déduire que si A et B sont semblables, on a : $d(A) = d(B)$.

2. (a) Montrer que t est une application linéaire de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer une base de son image et une base de son noyau.

   (b) Montrer que pour tout A, $t({}^tA) = t(A)$.
   (c) Établir que si A et B sont deux éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ on a : $t(AB) = t(BA)$.
   (d) En déduire que si A et B sont semblables, on a : $t(A) = t(B)$.

3. Soit A un élément donné de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I.
   (a) Établir l'existence d'un unique couple (α, β) de réels vérifiant : $A^2 = \alpha A + \beta I$.
   (b) Exprimer α et β en fonction de $d(A)$ et $t(A)$.

4. Soit A un élément donné de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice associée dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$. On pose : $w = e_1 + e_2$.
   (a) Supposons qu'il existe trois réels α, β, γ tels que $u(e_1) = \alpha e_1$, $u(e_2) = \beta e_2$ et $u(w) = \gamma w$. Montrer que $\alpha = \beta = \gamma$ puis aboutir à une contradiction.
   (b) En déduire qu'il existe au moins un élément non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, u(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Montrer que la matrice M associée à u dans la base $(x, u(x))$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels, indépendants de la base $(x, u(x))$, que l'on exprimera en fonction de $d(A)$ et $t(A)$.
   (d) En déduire que la matrice A est semblable à sa transposée ${}^tA$

5. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{C}(A)$ (on discutera selon que A est ou n'est pas colinéaire à I).