AP 16

Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres - Le kurtosis

Problème 1. Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels. On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

(Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;

(Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

1. Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$.
2. Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $M + \alpha I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.
3. On note K_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
   (a) Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.
   (b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous espace-vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
4. (a) Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.
   (b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$.
   Cette matrice est-elle diagonalisable ?
6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t.
   En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.
   (b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

7. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   Montrer que 0 est une valeur propre de M et que c'est la seule valeur propre de M.

8. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.

   Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathscr{B}$.

   (a) Montrer les inclusions $Ker(u) \subset Ker(u^2)$ et $Ker(u^2) \subset Ker(u^3)$.

   (b) Montrer que les noyaux $Ker(u^2)$ et $Ker(u^3)$ ne peuvent pas être égaux. Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2, et en tirer une contradiction.

   (c) Montrer que les noyaux $Ker(u)$ et $Ker(u^2)$ ne peuvent pas être égaux non plus.

   (d) Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.

9. Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

   (a) Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3$.

   (b) Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls.

   (c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1.
   Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

   (d) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.

   (e) Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

Problème 2. Le kurtosis

Introduction

On utilise dans tout le problème les notations $E(X)$ et $V(X)$ pour désigner l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X.
On rappelle que pour tout entier naturel n, le moment centré d'ordre n de X, s'il existe, est défini par

$$\mu_n(X) = E\left([X - E(X)]^n\right).$$

On dit qu'une variable aléatoire X admet un kurtosis lorsque

- X admet des moments centrés d'ordre 2, 3 et 4 ;
- $V(X) \neq 0$.

On appelle *kurtosis* ou *coefficient d'aplatissement* de X, le réel défini par :

$$K(X) = \frac{\mu_4(X)}{(\mu_2(X))^2} - 3 = \frac{\mu_4(X)}{(V(X))^2} - 3.$$

On admet le résultat suivant : une variable aléatoire X admet une variance nulle si, et seulement si, il existe un réel a tel que $P(X = a) = 1$. On dit dans ce cas que la loi de X est certaine.

Question préliminaire

Soit X une variable aléatoire admettant un kurtosis. Soient α et β deux réels, avec $\alpha \neq 0$.

1. Montrer que la variable aléatoire $\alpha X + \beta$ admet un kurtosis, et que l'on a :

$$K(\alpha X + \beta) = K(X).$$

Partie I. Des exemples

2. Loi uniforme.

   Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

   (a) Rappeler l'espérance de X et calculer sa variance.

   (b) Calculer le kurtosis de X.

   (c) En utilisant le préliminaire, déterminer le kurtosis pour une loi uniforme sur $[a,b]$ (avec a et b réels et $a < b$).

3. Loi normale.

   Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

   (a) Montrer que X admet un moment centré d'ordre n pour tout entier naturel n.

   (b) Pour tout entier naturel n, établir la relation $\mu_{n+2}(X) = (n+1)\mu_n(X)$.

   (c) Montrer que le kurtosis de X est nul.

   (d) Que vaut le kurtosis pour une loi normale de paramètres quelconques ?

4. Loi de Bernoulli.

   Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

   (a) Calculer le kurtosis de X en fonction de p.

   (b) Montrer que $K(X)$ est minimal pour $p = \frac{1}{2}$ et déterminer la valeur minimale.

Partie II. Minoration du kurtosis

5. Soit Y une variable aléatoire admettant une variance. Montrer que : $E(Y^2) \geq E(Y)^2$.

6. Montrer que le kurtosis d'une variable aléatoire, s'il est défini, est toujours supérieur ou égal à -2.

7. Soient a et b deux réels distincts. On suppose que X suit la loi uniforme sur $\{a,b\}$, autrement dit que $P(X=a) = P(X=b) = \frac{1}{2}$. Vérifier que $K(X) = -2$.

8. On se propose de montrer la réciproque de ce résultat. Soit X une variable aléatoire admettant un kurtosis égal à -2.

   (a) Montrer que la variable $(X - E(X))^2$ suit une loi certaine.

   (b) En déduire que $P(X = x)$ est non nulle uniquement pour deux valeurs réelles de x que l'on notera a et b.

   (c) Montrer que X suit la loi uniforme sur $\{a,b\}$.

9. Existe-t-il une majoration du kurtosis, c'est-à-dire un réel M tel que $K(X) \leq M$ pour toute variable X admettant un kurtosis ?

Partie III. Somme de variables

10. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, centrées, admettant un kurtosis.
    Montrer : $E\left((X+Y)^4\right) = E\left(X^4\right) + 6V(X)V(Y) + E\left(Y^4\right)$.

11. Établir la formule : $K(X+Y) = \dfrac{V(X)^2K(X) + V(Y)^2K(Y)}{[V(X)+V(Y)]^2}$.

12. Montrer que cette formule est encore valable pour des variables X et Y indépendantes mais non nécessairement centrées.

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes, chacune admettant un kurtosis, alors

$$K\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_k)^2 K(X_k)}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_k)\right)^2}.$$

14. Soient X une variable admettant un kurtosis, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

    (a) Établir : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K(S_n) = 0$.

    (b) Interpréter ce résultat, en commençant par rappeler l'énoncé du théorème de la limite centrée.