Licence MMI. Module MA41.

Session de juin 2007. Durée 2 heures.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. L'usage de toute calculatrice ou de tout document est interdit.

Exercice I.

1. Donner le développement en série entière de la fonction $x \to f(x) = \text{Arctan}(x)$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ obtenue?

2. Démontrer que la série entière obtenue à la question 1 converge pour $x = 1$.

3. Démontrer que la série entière obtenue à la question 1 converge uniformément sur $[0, 1]$. On indiquera précisément le critère utilisé.

4. Quelle est la somme de la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice II. Soit λ un nombre réel, non entier ($\lambda \notin \mathbb{Z}$). Soit f la fonction $2\pi-$périodique telle que

$$f(x) = e^{i\lambda x} \qquad \forall x \in [0, 2\pi[$$

1. Calclculer les coefficients de Fourier de f. La définition des coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$ et $c_0(f)$ est rappelée à la fin de l'énoncé.

2. Montrer, en utilisant un théorème du cours qu'on citera précisément, que la série suivante converge pour tout x

$$c_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_n(f) \ \cos(nx) \ + b_n(f) \ \sin(nx)],$$

et déterminer sa somme lorsque $x \in [0, 2\pi[$.

3. En déduire la somme de la série numérique, si $\lambda \notin \mathbb{Z}$:

$$S = \frac{1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda}{\lambda^2 - n^2}.$$

Exercice III. Soit θ une nombre réel dans $]0, 2\pi[$ (qui jouera le rôle d'une constante dans tout cet exercice).

1. Quelle est la somme $f(x)$ de la série entière suivante, pour tout $x \in]-1, 1[$?

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} x^n \sin((n+1)\theta)$$

On admettra que le rayon de convergence de cette série vaut 1.

2. Développer en série entière la fonction $F(x)$ suivante, définie si $x \in]-1, 1[$:

$$F(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x \sin\theta}{1 - x\cos\theta}\right)$$

(Il y a un certain lien entre les fonctions F et f.)

Rappel: définition des coefficients de Fourier.

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx \qquad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx$$

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

Licence MMI. Module MA41.

Session de septembre 2007. Durée 2 heures.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. L'usage de toute calculatrice ou de tout document est interdit.

Exercice I.

On pose, pour tout $x \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_n(x) = \frac{x}{(1+nx)^2} \qquad \text{et} \qquad v_n(x) = \frac{1}{1+nx} - \frac{1}{1+(n+1)x}$$

1. Démontrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ converge pour tout $x \geq 0$.

On posera dans toute la suite

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \qquad \forall x \geq 0$$

2. Combien vaut $f(0)$?

3. Pour tout $a > 0$, démontrer que

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{an^2} \qquad \forall x \geq a$$

4. Démontrer que f est continue sur $]0, +\infty[$. On énoncera précisément les théorèmes du cours qu'on utilisera.

5. Démontrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, on a:

$$\sum_{k=0}^{n} v_k(x) = 1 - \frac{1}{1+(n+1)x}$$

6. Démontrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ converge pour tout $x \geq 0$.

On posera dans toute la suite

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \qquad \forall x \geq 0$$

7. Calculer $g(x)$ pour tout $x \geq 0$, (y compris $x = 0$). La fonction g est-elle continue sur $[0, +\infty[$?

8. Calculer la différence $u_n(x) - v_n(x)$ sous forme d'une fraction rationnelle.

9. Montrer que

$$\frac{x^2}{(nx+1)^2(nx+x+1)} \leq \frac{1}{n^2} \qquad \forall x \geq 0 \quad \forall n \geq 1$$

10. La fonction $f - g$ est-elle continue sur $[0, +\infty[$? Justifier votre réponse.
11. Déterminer les limites, quand $x > 0$ tend vers 0, de $g(x)$, et de $f(x) - g(x)$.
12. La fonction f est-elle continue sur $[0, \infty[$? Justifier votre réponse.

Exercice II.

Soit f la fonction $2\pi-$périodique telle que

$$f(x) = x \qquad \forall x \in [0, 2\pi[$$

1. La fonction f est-elle C^1 par morceaux?
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Licence MMI. Module MA41.

Session de juin 2008. Durée 2 heures.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1. Polynômes de Bernoulli. Le but de l'exercice est d'étudier les fonctions $f_1, ..., f_4$ définies pour $x \in \mathbb{R}$ par:

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} \qquad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$$

$$f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3} \qquad f_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^4}$$

et, en particulier, de montrer que ces fonctions sont égales à des polynômes sur l'intervalle $]-\pi, +\pi[$.

1. Montrer que les séries définissant $f_2(x)$, $f_3(x)$ et $f_4(x)$ convergent pour tout x réel, et que les fonctions f_2, f_3 et f_4 sont continues sur $\mathbb{R}$. Il suffira de faire ces preuves pour f_2, les autres étant identiques.

2. Soit g une fonction $2\pi-$périodique telle que:

$$g(x) = x \qquad \forall x \in]0, 2\pi[$$

Calculer les coefficients de Fourier de g:

$$c_0(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx$$

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx \; dx \qquad b_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx \; dx \qquad n \geq 1$$

3. En appliquant à g un théorème du cours qu'on précisera, en indiquant notamment la régularité de la fonction g, montrer que la série de Fourier de g converge pour tout x réel, et déterminer sa somme. En déduire que la série définissant $f_1(x)$ converge pour tout x réel, et calculer sa somme pour tout $x \in [-\pi, +\pi]$.

4. En appliquant à g un théorème du cours qu'on précisera, montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

5. On admettra que, pour tout $x \in]-\pi, +\pi[$, et pour tout $n \geq 1$, on a:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin kx \right| \leq \frac{1}{\cos(\frac{x}{2})}$$

Démontrer que f_2 est dérivable sur $]-\pi, +\pi[$, et que $f_2'(x) = -f_1(x)$ pour tout $x \in]-\pi, +\pi[$.

6. Montrer que f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f_3'(x) = f_2(x)$ pour tout x réel. On admettra que f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f_4'(x) = -f_3(x)$ pour tout x réel. (La preuve est identique).

7. Combien valent $f_1(0)$ et $f_3(0)$? Quels sont les coefficients de Fourier de f_2 et de f_4? Démontrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)dx = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f_4(x)dx = 0$$

On pourra se contenter de prouver la première égalité.

8. En se servant des questions 3 à 6, calculer $f_2(x)$ pour tout $x \in [-\pi, +\pi]$, puis $f_3(x)$, puis $f_4(x)$ pour ces mêmes valeurs. Si on n'a pas réussi la question 3, on admettra que $f_1(x) = -\frac{x}{2}$ pour tout $x \in]-\pi, +\pi[$. Pourquoi les formules obtenues sont-elles valables aussi pour $x = \pi$ et $x = -\pi$?

9. En donnant à x des valeurs particulières dans $[-\pi, +\pi]$, calculer les sommes des séries:

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad S_3 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$$

Exercice II. On cherche une solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1 + x^2)u''(x) + 2xu'(x) - 2u(x) = 6x$$

qui vérifie aussi la condition

$$u(0) = u'(0) = 0$$

On cherche u sous forme de somme d'une série entière:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

de rayon de convergence $R > 0$, vérifiant (E) dans $]-R, R[$.

1. Trouver une relation entre a_n et a_{n+2} pour tout $n \geq 0$. (Le cas $n = 1$ est un peu différent des autres.)

2. Déterminer a_0, a_1, et a_3. Déterminer a_n pour tout n. On séparera les deux cas, où n est pair ou impair.

3. Quel est le rayon de convergence de la série obtenue? Quelle est sa somme?

Licence MMI. Module MA0401.

Session de juin 2009. Durée 2 heures.

Les exercices et la question de cours peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice I. Soit $(u_n)_{(n\geq 0)}$ la suite de fonctions définies sur $[0,\infty[$ par

$$u_n(x) \;=\; \frac{x}{1+n^2x^2}$$

1) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

On posera, pour tout $x \geq 0$

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$

2) Calculer $f(0)$. Le but du reste de l'exercice est de trouver la limite de $f(x)$ quand $x > 0$ tend vers 0_+.

3) On pose, pour tout $x \geq 0$, et pour tout $n \geq 0$,

$$v_n(x) = \mathrm{Arctan}\big((n+1)x\big) \;-\; \mathrm{Arctan}\big(nx\big)$$

Calculer la somme suivante, pour tout $n \geq 1$, et pour tout $x \geq 0$:

$$V_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} v_k(x)$$

En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x)$ converge. Calculer, pour tout $x \geq 0$, la somme:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x)$$

4) On admettra que, pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$, on a

$$\left|\mathrm{Arctan}\, b \;-\; \mathrm{Arctan}\, a \;-\; \frac{b-a}{(1+a^2)}\right| \;\leq\; \frac{(b-a)^2}{2(1+a^2)}$$

On ne demande pas de démontrer cette inégalité, mais de s'en servir. Montrer que la série $\sum(v_n - u_n)$ converge normalement sur $[0,\infty[$.

5) Si f est la fonction du 1) et g la fonction du 3), calculer $g(0) - f(0)$. En utilisant une certaine propriété de la fonction $g - f$, calculer la limite suivante:

$$\ell \;=\; \lim_{x\to 0_+} f(x) \;=\; \lim_{x\to 0_+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$

6) La fonction f est-elle continue sur $[0, \infty[$?

Exercice II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, $2\pi-$périodique, telle que:

$$f(x) = x^2 \qquad \forall x \in [0, 2\pi[$$

1) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Sinon, préciser ses points de discontinuité.

2) Calculer les coefficients de Fourier de f:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\ dx \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\ dx \qquad n \geq 1$$

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

3) Démontrer que la série suivante converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer sa somme pour tout $x \in [0, 2\pi[$.

$$S(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$$

On pourra se servir des questions précédentes, et d'un théorème dont on citera précisément les hypothèses. On n'oubliera pas le cas $x = 0$.

4) En déduire la somme de la série suivante:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Question de cours. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses:

1. Toute série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge uniformément sur l'intervalle ouvert $]-R, +R[$.

2. Une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.

FACULTE DES SCIENCES DE REIMS.

LICENCE L2. MODULE MA 401.

Session de mai 2010. Durée 2 heures.

L'usage de tout document et de toute calculatrice est interdit. Les exercices sont indépendants. La question de cours et les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Question de cours. Enoncer le théorème sur la dérivée de la limite d'une suite de fonctions sur un intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$. On précisera les hypothèses qui permettent d'affirmer que la limite est dérivable.

Exercice I.

a) Soient $r \in [0,1[$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que la série: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{int}$ converge, et calculer sa somme.

b) Le paramètre $r \in [0,1[$ étant toujours fixé, (et considéré comme une constante), on définit, pour tout $n \geq 0$, une fonction u_n par: $u_n(t) = r^n e^{int}$. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge uniformément sur $[0,2\pi]$.

c) Avec les notations du b), calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} u_n(t)dt$.

d) Déduire des questions a), b) et c) l'intégrale suivante, où $r \in [0,1[$:

$$A(r) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-re^{it}}dt$$

On énoncera précisément le théorème du cours qui justifie ce calcul.

e) Vérifier que

$$1 - 2r\cos\ t + r^2 = (r - e^{it})\ (r - e^{-it})$$

En déduire, pour la fraction ci-dessous une décomposition en éléments simples, de la forme:

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = \frac{A(t)}{r-e^{it}} + \frac{B(t)}{r-e^{-it}} + C$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions de t, et C une constante, que l'on déterminera.

f) Déduire des questions d) et e) le calcul de l'intégrale suivante, pour tout $r \in [0,1[$

$$I(r) = \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}dt$$

Exercice 2. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

On consière aussi une suite $(u_n)_{(n\geq 0)}$ de nombres positifs, telle que la série $\sum_0^\infty u_n$ converge. On posera

$$M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \qquad S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

On définit, pour tout entier n, une fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par:

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(kx)u_{n-k}$$

a) Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Démontrer qu'il existe un entier N (dépendant de ε) tel que:

$$n \geq N \qquad x \geq 1 \Longrightarrow \sum_{k=N}^{n} |f(kx)|\ |u_{n-k}| \leq \varepsilon$$

b) L'entier N étant maintenant fixé, démontrer que:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} |u_{n-k}| \ = \ 0$$

c) En déduire que la suite de fonctions (g_n) tend vers 0 uniformément sur $[1, \infty[$.

Exercice 3. Pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et $2\pi-$périodique, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

a) Si f est de classe C^1, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a:

$$c_n(f') = inc_n(f)$$

b) En déduire que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\ dt \ = \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(f)|^2$$

c) En déduire que, si $c_0(f) = 0$, on a:

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\ dt \ \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\ dt$$

FACULTE DES SCIENCES DE REIMS.

LICENCE L2. MODULE MA 401.

Session de septembre 2010. Durée 2 heures.

L'usage de tout document et de toute calculatrice est interdit. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1. Pour tout $n \geq 0$, on définit une fonction u_n sur $[0, +\infty[$ par:

$$u_n(x) = \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)} \qquad \forall x \geq 0$$

a) Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que, pour tout entier $N \geq 0$, on a:

$$\sum_{k=0}^{N} u_k(x) = 1 \; - \; \frac{1}{1+(N+1)x} \qquad \forall x \geq 0$$

c) On désigne par f la somme de la série:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \qquad \forall x \geq 0$$

Calculer $f(x)$ pour tout $x \geq 0$. On pourra se servir de la question b). On pourra étudier séparément le cas $x > 0$ et le cas $x = 0$.

d) La fonction f est-elle continue sur $[0, +\infty[$? sur $]0, +\infty[$?

e) La convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est-elle uniforme sur $[0, 1]$?

f) Montrer que la convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est uniforme sur tout segment $[a, b]$ tel que $0 < a < b$.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < \pi$. Soit f la fonction paire, $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$, telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } \; a < x \leq \pi \end{cases}$$

a. Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$ et $c_0(f)$, dont la définition est rappelée ci-dessous:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \; \cos(nx) \; dx \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \; \sin(nx) \; dx \qquad n \geq 1$$

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \; dx$$

b. Montrer que la série de Fourier de f converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, et déterminer sa somme, en énonçant précisément le théorème utilisé, et les hypothèses sur la fonction que ce théorème utilise.

c. Montrer que, si $0 < a < \pi$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n}$ converge, et calculer sa somme.

d. Même question avec la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin na)^2}{n^2}$.

Exercice 3. Trouver toutes les racines de l'équation

$$e^z = -2 \qquad z \in \mathbf{C}$$

Licence MMI. Module MA41.

DS du 6 mai 2008. Durée 1h30.

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. L'exercice 4 utilise les résultats des 3 premiers.

Exercice 1. On pose, pour tout réel $x > 1$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

(On sait que cette série converge si $x > 1$.)

a) Démontrer que f est continue sur $]1, +\infty[$. On se servira d'un théorème du cours.

b) Calculer la dérivée de la fonction $x \to u_n(x) = \frac{1}{n^x}$ $(n \geq 1)$.

c) Montrer que la fonction f définie ci-dessus est dérivable sur $]1, \infty[$. On se servira d'un autre théorème du cours.

Exercice 2. Soit $(v_n)_{(n\geq 1)}$ une suite de fonctions continues sur $]0, 1[$. On suppose que la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur $]0, 1]$. On suppose aussi que, pour tout $n \geq 1$, la limite suivante existe:

$$\lim_{n\to 0_+} v_n(x) = \alpha_n$$

On suppose enfin que la série numérique $\sum \alpha_n$ converge.

a) On pose, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0, 1]$:

$$V_n(x) = \begin{cases} v_n(x) & \text{si} \quad x \in]0, 1] \\ \alpha_n & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Montrer que, sous les trois hypothèses ci-dessus, la série $\sum V_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

b) On posera, pour tout $x \in]0, 1]$:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$$

Démontrer que

$$\lim_{x\to 0_+} F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

TSVP

Exercice 3.
a) Montrer que, si $x > 0$ et $n \geq 1$,

$$\left| \frac{1}{(n+1)^x} - \frac{1}{n^x} + \frac{x}{n^{x+1}} \right| \leq \frac{x(x+1)}{2n^{x+2}}$$

(On pourra appliquer la formule de Taylor à la fonction $t \to t^{-x}$, ($x > 0$ étant, pour le moment, une constante), sur un intervalle à choisir.)
b) On pose, maintenant, si $x > 0$ et $n \geq 1$:

$$v_n(x) = \frac{1}{n^{x+1}} + \frac{1}{x(n+1)^x} - \frac{1}{xn^x}$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur $]0,1]$.
c) On pose, maintenant, si $x > 0$ et $n \geq 1$:

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{x+1}} \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{x+1}}$$

Trouver une relation entre $\sum_{k=1}^{n} v_k(x)$ et $f_n(x)$. En déduire que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) = g(x) - \frac{1}{x} \qquad \forall x \in]0,1]$$

d) Montrer que $\lim_{x \to 0_+} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{(n+1)^x}{n^x}\right) = \ln(\frac{n+1}{n})$. En déduire que:

$$\lim_{x \to 0_+} v_n(x) = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Exercice 4, de synthèse, utilise les résultats des exercices 1, 2 et 3.
a) On pose, pour tout $n \geq 1$:

$$\alpha_n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Montrer que la série $\sum \alpha_n$ converge.
b) Si g est la fonction définie dans l'exercice 3, question c), montrer que

$$\lim_{x \to 0_+} g(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

Si f est la fonction de l'exercice 1, en déduire que

$$\lim_{x \to 1_+} f(x) - \frac{1}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

Remarque, pour information. La fonction f de l'exercice 1, habituellement notée ζ, s'appelle *fonction zeta de Riemann.* La somme $\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ s'appelle *constante d'Euler.*

MA 401. DS du 5 mai 2009. Durée 1h30.

Question de cours. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

a) Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 sur I, vérifiant les deux hypothèses suivantes:

$(H1)$ Pour tout $x \in I$, la suite de nombres $(f_n(x))$ a une limite quand n tend vers ∞. On notera $f(x)$ cette limite, ce qui définit une fonction f sur I.

$(H2)$ La suite de fonctions (f'_n) a une limite g, et la convergence est uniforme sur tout segment $[a, b]$ contenu dans I.

Démontrer que f est de classe C^1 sur I, et que $f' = g$.

b) Pour tout $n \geq 0$, on se donne une fonction u_n de classe C^1 sur I. On suppose que

$(H'1)$ La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge simplement sur I. On notera f sa somme.

$(H'2)$ La série $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ contenu dans I. On notera g sa somme.

Démontrer que f est de classe C^1 sur I, et que $f' = g$.

Ce qu'on pourra admettre, sans le redémontrer.

- que, si une suite de fonctions continues sur I tend, uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$, vers une limite, alors cette limite est continue sur I.
- que l'on a, pour toute fonction continue φ sur un segment $[a, b]$

$$\left| \int_a^b \varphi(x)dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|dx$$

Exercice 1.

a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+nx)}$ converge pour tout $x > 0$.

On notera f la fonction définie sur $]0, \infty[$ par:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+nx)}$$

b) Démontrer que la fonction f est continue sur $]0, \infty[$.

TSVP

Exercice 2.

On pose, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \geq 0$

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n x}{(1+nx)^2} \qquad v_n(x) = \frac{x^2}{(1+nx)^3}$$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, \infty[$.

b) Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur $[0, \infty[$.

c) Peut-on dire que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, \infty[$?

d) Même question avec la série $\sum v_n$.

Aide: on pourra étudier les variations des fonctions $x \to |u_n(x)|$ et $x \to |v_n(x)|$ sur $[0, \infty[$.

Module MA401.

DS du 15 février 2011. Durée 1h30.

Question de cours. Définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exercice. On pose, pour tout $x > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \; - \int_1^n \frac{dt}{t^x}$$

On admettra que, si $x > 0$, et si m sont des entiers tels que $m > n \geq 1$, on a:

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^x} \leq \int_n^m \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k^x}$$

a) En déduire que, sous les mêmes hypothèses:

$$\frac{1}{m^x} - \frac{1}{n^x} \leq f_m(x) - f_n(x) \leq 0$$

b) En déduire que, pour tout $x > 0$, la suite $(f_n(x))$ a une limite $f(x)$, et que la convergence est uniforme sur $[1, +\infty[$. On citera le théorème utilisé.

c) En déduire que la suite de nombres (X_n) définie par

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \; - \ln n$$

a une limite γ quand $n \to +\infty$. Cette limite γ est habituellement appelée *constante d'Euler.*

d) On sait (MA 303) que, pour tout $x > 1$, la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ converge. On notera $\zeta(x)$ sa somme (*fonction zeta de Riemann*):

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$$

Pour tout $x > 1$, trouver une relation entre $\zeta(x)$ et $f(x)$ (la fonction de la question b).

e) Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{x \to 1_+} \zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \gamma$$

On citera le théorème du cours et la propriété de la fonction f qui permettent de justifier le passage à la limite.

MODULE MA401. DS du 5 avril 2011.

Exercice I. Soit f la fonction définie sur $]-1,2[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{2-x}\right) \qquad \forall x \in]-1,2[$$

Développer f en série entière au voisinage de 0. Préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

Exercice II. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (x^2+x)\, u'' + (3x+1)\, u' + u = 0$$

On s'intéresse aux solutions de (E) qui sont développables en série entière au voisinage de l'origine, et telles que $u(0) = 1$.

1. En supposant qu'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, où les a_n $(n \geq 0)$ sont des nombres complexes, de rayon de convergence R non nul, dont la somme $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vérifie (E) dans l'intervalle $]-R,R[$, trouver une relation de récurrence entre les a_n $(n \geq 0)$.

2. Avec les notations de la question 1, en supposant de plus que la somme $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vérifie $u(0) = 1$, déterminer tous les a_n $(n \geq 0)$.

3. Quel est le rayon de convergence R de la série obtenue?

4. Déterminer $u(x)$ pour tout $x \in]-R,R[$.

Exercice III.

a) Quel est le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

b) On pose, pour tout $x \in]-1,1[$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

c) Démontrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1_-. (En utilisant le sens de variation de f sur $]0,1[$, on pourra aboutir à une contradiction en supposant que f ne tende pas vers $+\infty$ quand x tend vers 1_-.)

d) Soit $\alpha > \frac{1}{2}$. Pour tout $n \geq 1$, et pour tout $x \in [0,1]$, posons

$$u_n(x) = (1-x)^\alpha \, \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

Calculer

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |u_n(x)|$$

En déduire que, si $\alpha > \frac{1}{2}$, la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

e) En déduire que, si $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 1_-} (1-x)^\alpha f(x) = 0$$