Algèbres de Hopf combinatoires

Anthony Mansuy

10 avril 2012

Une algèbre est une famille $(A, m, 1_A)$ où :

1. A est un K-espace vectoriel.
2. $m : A \times A \longrightarrow A$ est bilinéaire. On note $m(x, y) = x.y$.
3. $1_A \in A$.

Avec les axiomes suivants :

1. Associativité : pour tous $x, y, z \in A$, $(x.y).z = x.(y.z)$.
2. Unité : pour tout $x \in A$, $1_A.x = x.1_A = x$.

On reformule ces axiomes en termes de diagrammes commutatifs. Pour cela il faut linéariser m et 1_A :

$$m : \left\{ \begin{array}{ccc} A \otimes A & \longrightarrow & A \\ x \otimes y & \longrightarrow & x.y \end{array} \right. \qquad \nu : \left\{ \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & A \\ \lambda & \longrightarrow & \lambda.1_A. \end{array} \right.$$

Les axiomes s'expriment alors de la manière suivante :

Associativité

$$m \circ (m \otimes Id) = m \circ (Id \otimes m)$$

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes Id"] \arrow[d, "Id \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A \end{tikzcd}$$

Unité

$$m \circ (Id \otimes \nu) = m \circ (\nu \otimes Id) = Id$$

$$\begin{tikzcd} K \otimes A \arrow[r, "\nu \otimes Id"] \arrow[dr, "\approx"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes K \arrow[l, "Id \otimes \nu"'] \arrow[dl, "\approx"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Une cogèbre est une famille (C, Δ, ε), où :

1. C est un K-espace vectoriel.
2. $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ est une application linéaire.
3. $\varepsilon : C \longrightarrow K$ est une application linéaire.

Avec les axiomes suivants (obtenus en dualisant les axiomes pour les algèbres) :

Coassociativité

$$(\Delta \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \Delta) \circ \Delta$$

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \otimes C & & C \otimes C \arrow[ll, "\Delta \otimes Id"'] \\
C \otimes C \arrow[u, "Id \otimes \Delta"] & & C \arrow[ll, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

Counité

$$(\varepsilon \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = Id$$

$$\begin{tikzcd}
K \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon \otimes Id"'] \arrow[r, "Id \otimes \varepsilon"] & C \otimes K \\
& C \arrow[ul, "\approx"] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ur, "\approx"'] &
\end{tikzcd}$$

Notations de Sweedler : pour tout $x \in C$, on écrit :

$$\Delta(x) = \sum_{x} x^{(1)} \otimes x^{(2)}.$$

Les axiomes de cogèbre se reformulent alors :

1. Coassociativité : pour tout $x \in C$,

$$\sum_{x, x^{(1)}} \left(x^{(1)}\right)^{(1)} \otimes \left(x^{(1)}\right)^{(2)} \otimes x^{(2)} = \sum_{x, x^{(2)}} x^{(1)} \otimes \left(x^{(2)}\right)^{(1)} \otimes \left(x^{(2)}\right)^{(2)}.$$

2. Counité : pour tout $x \in C$,

$$\sum_{x} \varepsilon\left(x^{(1)}\right) x^{(2)} = \sum_{x} x^{(1)} \varepsilon\left(x^{(2)}\right) = x.$$

Si A est une algèbre, alors $A \otimes A$ est aussi une algèbre :

$$\begin{aligned} (x_1 \otimes y_1).(x_2 \otimes y_2) &= x_1.y_1 \otimes x_2.y_2, \\ 1_{A \otimes A} &= 1_A \otimes 1_A. \end{aligned}$$

Si C est une cogèbre, alors $C \otimes C$ est aussi une cogèbre :

$$\begin{aligned} \Delta(x \otimes y) &= \sum_{x,y} \left(x^{(1)} \otimes y^{(1)}\right) \otimes \left(x^{(2)} \otimes y^{(2)}\right), \\ \varepsilon(x \otimes y) &= \varepsilon(x)\varepsilon(y). \end{aligned}$$

Lemme

Si B est à la fois une algèbre et une cogèbre, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Δ et ε sont des morphismes d'algèbres.
2. m et ν sont des morphismes de cogèbres.

Si ces conditions sont satisfaites, on dira que B est une bigèbre.

Autrement dit, dans une bigèbre :

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) = \sum_{x,y} x^{(1)}.y^{(1)} \otimes x^{(2)}.y^{(2)},$$

$$\varepsilon(x.y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y),$$

$$\Delta(1_A) = 1_A \otimes 1_A, \quad \varepsilon(1_A) = 1.$$

Exemples.

- Soit G un groupe. L'algèbre du groupe G est une bigèbre, avec le coproduit défini par $\Delta(g) = g \otimes g$ pour tout $g \in G$. La counité est donnée par $\varepsilon(g) = 1$ pour tout $g \in G$.
- Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. L'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ est l'algèbre engendrée par les éléments de $\mathfrak{g}$ et les relations :

$$x.y - y.x = [x, y] \text{ pour tous } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Il s'agit d'une bigèbre, dont le coproduit est donné par $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. La counité est donnée par $\varepsilon(x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

Soit C une cogèbre et soit A une algèbre. Alors $End_K(C, A)$ est muni d'un produit de convolution $*$ défini par :

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= m \circ (f \otimes g) \circ \Delta(x) \\ &= \sum_x f\left(x^{(1)}\right).g\left(x^{(2)}\right).\end{aligned}$$

L'élément neutre de ce produit est l'application $x \longrightarrow \varepsilon(x)1_A$.
Si B est une bigèbre, on peut prendre $A = C = B$. On dira que B est une algèbre de Hopf si $Id \in End_K(B, B)$ possède un inverse pour le produit de convolution. Cet (unique) inverse est appelé antipode de B et est noté S.

Autrement dit, si H est une algèbre de Hopf, pour tout $x \in H$:

$$\sum_x S\left(x^{(1)}\right).x^{(2)} = \sum_x x^{(1)}.S\left(x^{(2)}\right) = \varepsilon(x)1.$$

proposition

Soit H une algèbre de Hopf. Son antipode est un antimorphisme de bigèbres :

$$\begin{aligned} S(x.y) &= S(y).S(x), \\ S(1_A) &= 1_A, \\ \Delta(S(x)) &= \sum_x S\left(x^{(2)}\right) \otimes S\left(x^{(1)}\right), \\ \varepsilon \circ S(x) &= \varepsilon(x). \end{aligned}$$

Exemples.

- Si G est un groupe, son algèbre est une algèbre de Hopf. L'antipode est donné par $S(g) = g^{-1}$ pour tout $g \in G$.
- Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, son algèbre enveloppante est une algèbre de Hopf. L'antipode est donné par $S(x) = -x$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

Soit X un alphabet. L'algèbre de Hopf de battages $Sh(X)$ a pour base l'ensemble des mots en l'alphabet X.

- Son produit est donné par les battages des mots. Par exemple :

$$\begin{aligned}(abc)\times_{Sh}(d) &= (abcd)+(abdc)+(adbc)+(dabc),\\ (ab)\times_{Sh}(cd) &= (abcd)+(acbd)+(cabd)\\ &\quad +(acdb)+(cadb)+(cdab).\end{aligned}$$

- Le coproduit est donné par la déconcaténation. Par exemple :

$$\begin{aligned}\Delta(abcd) &= (abcd)\otimes 1+(abc)\otimes(d)+(ab)\otimes(cd)\\ &\quad +(a)\otimes(bcd)+1\otimes(abcd).\end{aligned}$$

- La counité est donnée par :

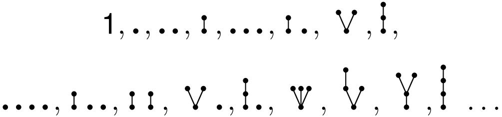
$$\begin{aligned} \varepsilon(1) &= 1, \\ \varepsilon(\text{mot non vide}) &= 0. \end{aligned}$$

- La bigèbre $Sh(X)$ est une algèbre de Hopf. L'antipode est donné par :

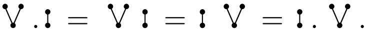
$$S(a_1 \dots a_n) = (-1)^n (a_n \dots a_1).$$

L'algèbre des arbres enracinés $\mathcal{H}_{CK}$ est utilisée par Connes et Kreimer pour la Renormalisation en Théorie des Champs Quantiques.

- Une base de cette algèbre est donnée par les forêts enracinées :



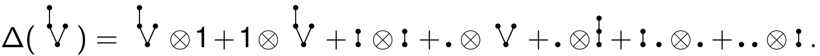
- Le produit est donné par l'union disjointe des forêts.



- Le coproduit est donné par les coupes admissibles :

$$\Delta(T) = \sum_{c \text{ coupe admissible}} P^c(T) \otimes R^c(T).$$

coupe c									totale
Admissible ?	oui	oui	oui	oui	non	oui	oui	non	oui
$W^c(T)$									
$R^c(T)$					$\times$			$\times$	1
$P^c(T)$	1				$\times$			$\times$	



- La counité est donné par :

$$\begin{aligned} \varepsilon(1) &= 1, \\ \varepsilon(F) &= 0 \text{ si } F \neq 1. \end{aligned}$$

- L'antipode est donné par : Si T est un arbre, n_c le nombre d'arêtes coupés par une coupe c,

$$S(T) = -T - \sum_{c \text{ coupe de } T} (-1)^{n_c} W^c(T)$$

Si X est un alphabet, on peut construire l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{CK}^{X}$ des arbres enracinés décorés par X. Par exemple, si $a, b, c \in X$,

$$\Delta\left({}^{a}\mathbb{V}_{c}^{b}\right) = {}^{a}\mathbb{V}_{c}^{b} \otimes 1 + 1 \otimes {}^{a}\mathbb{V}_{c}^{b} + \bullet_a \otimes \mathfrak{l}^{b}_{c} + \bullet_b \otimes \mathfrak{l}^{a}_{c} + \bullet_a \bullet_b \otimes \bullet_c .$$

Ordres linéaires sur une forêt

Soit F une forêt à n sommets et soit $\sigma : V(F) \to \{1, \ldots, n\}$ une application. On dit que σ est un ordre linéaire sur F si pour tous $a, b \in V(F)$,

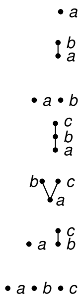
$$(a \to b \text{ dans } F) \Longrightarrow (\sigma(a) > \sigma(b)).$$

Théorème

L'application suivante définit un morphisme surjectif de l'algèbre de Hopf des forêts $\in \mathcal{H}_{CK}^{X}$ vers $Sh(X)$:

$$F \longrightarrow \sum \text{ordre linéaire sur } F.$$

Par exemple :



$$
\begin{aligned}
&\longrightarrow (a),\\
&\longrightarrow (ab),\\
&\longrightarrow (ab)+(ba),\\
&\longrightarrow (abc),\\
&\longrightarrow (abc)+(acb),\\
&\longrightarrow (abc)+(bac)+(bca),\\
&\longrightarrow (abc)+(acb)+(bac)+(bca)+(cab)+(cba).
\end{aligned}
$$

Soient X un alphabet et $(f_a)_{a\in X}$ des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ intégrables. Posons :

$$I(a_1\dots a_n)=\int_0^1 f_{a_1}(x_1)dx_1\int_0^{x_1} f_{a_2}(x_2)dx_2\dots\int_0^{x_{n-1}} f_{a_n}(x_n)dx_n.$$

Proposition

$$I(a_1\dots a_p)I(b_1\dots b_q)=I\left((a_1\dots a_p)\times_{Sh}(b_1\dots b_q)\right).$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} I(a)I(b) &= \int_0^1 f_a(x)dx\int_0^1 f_b(y)dy \\ &= \int_0^1 f_a(x)dx\int_0^x f_b(y)dy+\int_0^1 f_b(y)dy\int_0^y f_a(x)dx \\ &= I(ab)+I(ba). \end{aligned}$$

Avec le morphisme d'algèbre surjectif $\mathcal{H}_{CK}^{X} \to Sh(X)$, on définit alors un morphisme d'algèbre $J : \mathcal{H}_{CK}^{X} \to \mathbb{R}$.

Par exemple :

$$J({}^{b}\mathbb{V}_{a}^{c}) = \int_0^1 f_a(x)dx \int_0^x f_b(y)dy \int_0^x f_c(z)dz.$$

Applications : Théorie des Chemins Rugueux, Convergence d'intégrales (ex : Calcul moulien avec l'arborification) ...