Université de Reims Champagne Ardenne
UFR Sciences Exactes et Naturelles

Année universitaire 2012-2013
MA 0831 - Master 1

CM

Espaces affines: Barycentres et convexité

$\mathcal{E}$ désignera un $\mathbb{K}$-espace affine de dimension finie n associé à un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1 Barycentres

Définition 1 *1. On appelle point pondéré un couple $(A, \alpha) \in \mathcal{E} \times \mathbb{K}$.*

2. Étant donné m points pondérés $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_m, \alpha_m)$, on appelle système de points pondérés de $\mathcal{E}$ le m-uplet $\mathcal{A} = ((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_m, \alpha_m))$. Le scalaire $\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$ est appelé le poids total de $\mathcal{A}$.

On définit alors l'application

$$F_{\mathcal{A}} : \begin{cases} \mathcal{E} & \to & E \\ M & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_1 \overrightarrow{MA_i} \end{cases}$$

appelée la fonction vectorielle de Leibniz associé à $\mathcal{A}$.

Théorème 2 *Soit $\mathcal{A} = ((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_m, \alpha_m))$ un système de points pondérés de $\mathcal{E}$ de poids total α. Alors*

- *si $\alpha = 0$, la fonction $F_{\mathcal{A}}$ est constante.*
- *si $\alpha \neq 0$, la fonction $F_{\mathcal{A}}$ est bijective.*

Preuve. Soient $M, N \in \mathcal{E}$. Alors

$$F_{\mathcal{A}}(M) - F_{\mathcal{A}}(N) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{NA_i} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{NA_i}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{MN} = \alpha \overrightarrow{MN}.$$

- Si $\alpha = 0$, alors $F_{\mathcal{A}}(M) = F_{\mathcal{A}}(N)$ pour tous $M, N \in \mathcal{E}$ et donc $F_{\mathcal{A}}$ est constante.
- Si $\alpha \neq \overrightarrow{0}$, alors $F_{\mathcal{A}}(M) - F_{\mathcal{A}}(N) = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $M = N$. Ainsi $F_{\mathcal{A}}$ est injective. Par ailleurs, $F_{\mathcal{A}}$ est surjective: Soit $\overrightarrow{u} \in E$. Montrons qu'il existe un point $M \in \mathcal{E}$ tel que $F_{\mathcal{A}}(M) = \overrightarrow{u}$. Si $F_{\mathcal{A}}(M) = \overrightarrow{u}$, alors $F_{\mathcal{A}}(A_1) + \alpha \overrightarrow{A_1 M} = \overrightarrow{u}$ et donc, comme $\alpha \neq 0$, $\overrightarrow{A_1 M} = \frac{1}{\alpha}(-\overrightarrow{u} + F_{\mathcal{A}}(A_1)$. Cette dernière relation défini un unique point M et celui-ci vérifie $F_{\mathcal{A}}(M) = \overrightarrow{u}$.

□

Définition 3 *Soit $\mathcal{A} = ((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_m, \alpha_m))$ un système de points pondérés de $\mathcal{E}$ de poids total $\alpha \neq 0$. Alors le vecteur $\overrightarrow{0}$ a un unique antécédent G dans $\mathcal{E}$ par la fonction $F_{\mathcal{A}}$. On notera $bar(\mathcal{A})$ ce point et on l'appellera le barycentre du système $\mathcal{A}$. En particulier,*

$$\begin{aligned} G = bar(\mathcal{A}) \quad & \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \\ & \Longleftrightarrow \quad \forall\, M \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{MG} = \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \right) \\ & \Longleftrightarrow \quad \exists\, M \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{MG} = \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \right) \end{aligned}$$

Remarque. Si $\mathcal{A} = ((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_m, \alpha_m))$ un système de points pondérés de $\mathcal{E}$ de poids total non nul et $G = bar(\mathcal{A})$, alors $G \in Aff(A_1, \ldots, A_m)$. En particulier:

- Si $G = bar((A, \alpha), (B, \beta))$, $\alpha + \beta \neq 0$, alors A, B et G sont alignés.

- Si $G = bar((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma))$, $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, alors A, B, C et G sont coplanaires.

Proposition 4 *Soit $\mathcal{A} = ((A_1,\alpha_1),\ldots,(A_m,\alpha_m))$ un système de points pondérés de $\mathcal{E}$ de poids total $\alpha \neq 0$ et notons $G = bar(\mathcal{A})$. Alors*

1. *(Commutativité) Si on change l'ordre des points pondérés dans le systèmes $\mathcal{A}$, le nouveau système obtenue garde le même barycentre G et le même poids total α.*

2. *Si on retire du système les points de poids nul ($\alpha_i = 0$), le nouveau système obtenue garde le même barycentre G et le même poids total α.*

3. *(Homogénéité) Si on multiplie tous les poids α_i par un même scalaire λ non nul, le nouveau système obtenue garde le même barycentre G et son poids total est $\lambda\alpha$.*

4. *(Associativité) Soit $k \in \{1,\ldots,m-1\}$ et supposons que $\beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k \neq 0$. Alors le barycentre $H = bar((A_1,\alpha_1),\ldots,(A_k,\alpha_k))$ est bien défini et*

$$G = bar((H,\beta),((A_{k+1},\alpha_{k+1}),\ldots,(A_m,\alpha_m)).$$

Preuve. Les deux premiers points sont faciles et laissés au lecteur.

Pour démontrer la propriété d'homogénéité, considérons $\lambda \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} G = bar(\mathcal{A}) &\iff \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \iff \lambda\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \overrightarrow{0} \iff \sum_{i=1}^{m} (\lambda\alpha_i)\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \\ &\iff G = bar((A_1,\lambda\alpha_1),\ldots,(A_m,\lambda\alpha_m)) \end{aligned}$$

Posons $\mathcal{A}' = ((A_1,\lambda\alpha_1),\ldots,(A_m,\lambda\alpha_m))$ le nouveau système de points pondérés obtenu. Le poids total de $\mathcal{A}'$ est $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda\alpha_i = \lambda\alpha$.

Démontrons le dernier point. Notons $G' = bar((H,\beta),((A_{k+1},\alpha_{k+1}),\ldots,(A_m,\alpha_m))$. Montrons que $G' = G$. Par définition du barycentre, on a:

- $\beta\overrightarrow{G'H} + \displaystyle\sum_{i=k+1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{G'A_i} = \overrightarrow{0} \iff \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{G'H} + \sum_{i=k+1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{G'A_i} = \overrightarrow{0}$,

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{HA_i} = \overrightarrow{0}$.

En sommant ces deux égalités, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{G'H} + \sum_{i=k+1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{G'A_i} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{HA_i} = \overrightarrow{0} &\iff \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{G'A_i} + \sum_{i=k+1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{G'A_i} = \overrightarrow{0} \\ &\iff \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{G'A_i} = \overrightarrow{0}, \end{aligned}$$

donc $G' = bar((A_1,\alpha_1),\ldots,(A_m,\alpha_m)) = G$. □

Remarque. Si on multiplie tous les poids par $\dfrac{1}{\alpha}$, le barycentre reste inchangé et le poids total du nouveau système est égal à 1 (avec la propriété d'homogénéité). Ainsi, lorsqu'un système de points pondérés est de poids total non nul, on pourra toujours se ramener au cas où ce poids est égal à 1.

Définition 5 *Soit G le barycentre d'un système de points pondérés $\mathcal{A} = ((A_1,\alpha_1),\ldots,(A_m,\alpha_m))$. Si $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \alpha \neq 0$, on dit que G est l'isobarycentre ou le centre de gravité de $\mathcal{A}$.*

Théorème 6

1. *Soit $\mathcal{F}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$. Alors $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si tout barycentre d'un système de points pondérés de $\mathcal{F}$ est aussi un point de $\mathcal{F}$. On dit alors que $\mathcal{F}$ est stable par calcul barycentrique.*

2. *Soit X une partie non vide de $\mathcal{E}$. Alors le sous-espace affine $Aff(X)$ de $\mathcal{E}$ engendré par X est l'ensemble des barycentres $bar(\mathcal{A})$ des systèmes de points pondérés $\mathcal{A}$ de X.*

Preuve.

1.
   - $\Longrightarrow$: Supposons que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Soient $\mathcal{A} = ((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_m, \alpha_m))$ un système de points pondérés de $\mathcal{F}$ de poids total $\alpha \neq 0$ et $G = bar(\mathcal{A})$. Alors, d'après la définition 3, on a
   $$G = A_1 + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=2}^{m} \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i} \in A_1 + Vect(\overrightarrow{A_1A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_m}) = Aff(A_1, \ldots, A_m).$$
   Or $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine, donc $Aff(A_1, \ldots, A_m) \subset F$ et on a donc bien $G \in \mathcal{F}$.
   - $\Longleftarrow$: Supposons que tout barycentre de points de $\mathcal{F}$ est aussi dans $\mathcal{F}$. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ par hypothèse. Soit $A \in \mathcal{F}$. Montrons que $V = \{\overrightarrow{AM}; M \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E et on aura alors que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$:
     - $A \in \mathcal{F}$, donc $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0} \in V$ et $V \neq \emptyset$.
     - Soient $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN} \in V$ (avec $M, N \in \mathcal{F}$) et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $\overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{AN} \in V$. Soit P le point de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{AN}$. Alors
     $$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{AN} &\iff \overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM}) + \lambda(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PN}) \\ &\iff \lambda\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PM} - \lambda\overrightarrow{PN} = \emptyset \\ &\iff P = bar((A, \lambda), (M, -1), (N, -\lambda)). \end{aligned}$$
     Remarquons que P est bien défini car $\lambda - 1 - \lambda \neq 0$. Comme $A, M, N \in \mathcal{F}$, on a par hypothèse $P \in \mathcal{F}$ et donc $\overrightarrow{AP} \in V$.

2. Soit $A \in Aff(X)$, de sorte qu'on a $Aff(X) = A + Vect(\overrightarrow{AM}, M \in X)$.
   Posons $Y = \{bar(\mathcal{A}); \mathcal{A}$ systèmes de points pondérés de $X\}$.
   - $Aff(X) \subset Y$: Soit $N \in Aff(X)$. Alors $\overrightarrow{AN} \in Vect(\overrightarrow{AM}; M \in X)$ et donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $M_1, \ldots, M_n \in X$ tels que $\overrightarrow{AN} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{AM_i}$. Alors
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{AM_i} &\iff \overrightarrow{AN} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{AN} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{NM_i} \\ &\iff (1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i)\overrightarrow{NA} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{NM_i} = \overrightarrow{0} \\ &\iff N = bar((A, 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i), (M_1, \lambda_1), \ldots, (M_n, \lambda_n)) \\ &\Longrightarrow N \in Y \end{aligned}$$
   - $Y \subset Aff(X)$: Soit $G \in Y$. G est donc le barycentre d'un système de points pondérés de X et donc de $Aff(X)$ (car $X \subset Aff(X)$) et comme $Aff(X)$ est un sous-espace affine, le premier point implique $G \in Aff(X)$.

□

Exemples.

1. Soient $A, B \in \mathcal{E}$, $A \neq B$. Alors:
$$\begin{aligned} (AB) &= \{bar((A, \alpha), (B, \beta)); (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \alpha + \beta \neq 0\} \\ &= \{bar((A, \alpha), (B, \beta)); (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \alpha + \beta = 1\} \end{aligned}$$

2. Soient $A, B, C \in \mathcal{E}$ non alignés. Alors:
$$\begin{aligned} (ABC) &= \{bar((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)); (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3, \alpha + \beta + \gamma \neq 0\} \\ &= \{bar((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)); (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3, \alpha + \beta + \gamma = 1\} \end{aligned}$$

Proposition 7 *Soit $\mathcal{R} = (A_0, \ldots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Alors tout point $M \in \mathcal{E}$ s'écrit de façon unique sous la forme $M = bar((A_0, \alpha_0), \ldots, (A_n, \alpha_n))$ avec $\alpha_0 + \ldots + \alpha_n = 1$. Le $(n+1)$-uplet $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ s'appelle le système de coordonnées barycentriques de M dans le repère $\mathcal{R}$.*

Preuve. Si $\mathcal{R}$ est un repère affine, $Aff(\mathcal{R}) = \mathcal{E}$, donc pour tous $M \in \mathcal{E}$, il existe $(\alpha'_0, \ldots, \alpha'_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $M = bar((A_0, \alpha'_0), \ldots, (A_n, \alpha'_n))$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \neq 0$ (avec le théorème 6). Avec la propriété d'homogénéité du barycentre, on en déduit que pour tous $M \in \mathcal{E}$, il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $M = bar((A_0, \alpha_0), \ldots, (A_n, \alpha_n))$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Montrons l'unicité de $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$. Supposons $G = bar((A_0, \alpha_0), \ldots, (A_n, \alpha_n)) = bar((A_0, \beta_0), \ldots, (A_n, \beta_n))$ avec $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$. Alors

$$\overrightarrow{A_0G} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i},$$

et de même, $\overrightarrow{A_0G} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overrightarrow{A_0A_i}$. Comme $(A_0, \ldots, A_n)$ est un repère affine, $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de E et donc par unicité de l'écriture dans cette base du vecteur $\overrightarrow{A_0G}$, on a $\alpha_i = \beta_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Enfin, $\alpha_0 = 1 - \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i = 1 - \sum_{1 \leq i \leq n} \beta_i = \beta_0$. □

Proposition 8

1. *Soit $\mathcal{R} = (A_0, \ldots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Alors $\mathcal{R}' = (A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$. Et pour tout point M, si $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ est le système de coordonnées barycentriques de M dans $\mathcal{R}$, alors $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est le système de coordonnées cartésiennes de M dans $\mathcal{R}'$.*

2. *Réciproquement, si $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est un repère cartésien de E, alors $\mathcal{R} = (O, O + \overrightarrow{e_1}, \ldots, O + \overrightarrow{e_n})$ est un repère affine de $\mathcal{E}$. Et pour tout point M, si $(x_1, \ldots, x_n)$ est le système de coordonnées cartésiennes de M dans $\mathcal{R}'$, alors $(1 - x_1 - \ldots - x_n, x_1, \ldots, x_n)$ est le système de coordonnées barycentriques de M dans $\mathcal{R}$.*

Preuve.

1. Comme $\mathcal{R} = (A_0, \ldots, A_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$, $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de E. Donc $\mathcal{R}' = (A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$. Soit M un point de coordonné barycentrique $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ dans $\mathcal{R}$. Alors $M = bar((A_0, \alpha_0), \ldots, (A_n, \alpha_n))$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. On a donc $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}$. Donc $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est le système de coordonnées cartésiennes de M dans $\mathcal{R}'$.

2. Soit $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$. Pour $1 \leq i \leq n$, on note $A_i = O + \overrightarrow{e_i}$ de sorte que $\mathcal{R} = (O, A_1, \ldots, A_n)$. Comme pour tout i, $\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{e_i}$, on en déduit que $(\overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_n})$ est une base de E, d'où $(A_0, \ldots, A_n)$ est bien un repère affine de $\mathcal{E}$. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est le système de coordonnées cartésiennes de M dans $\mathcal{R}'$, alors

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA_i})$$

Donc

$$(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i) \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{0}.$$

Donc $M = bar((O, 1 - x_1 - \ldots - x_n), (A_1, x_1), \ldots, (A_n, x_n))$ et comme la somme des poids est 1, $(1 - x_1 - \ldots - x_n, x_1, \ldots, x_n)$ est le système de coordonnées barycentriques de M dans $\mathcal{R}$.

□

Proposition 9 *Soit $\mathcal{E}'$ un deuxième $\mathbb{K}$-espace affine. $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est une application affine si et seulement si, pour tout système de points pondérés de $\mathcal{E}$ de poids total non nul, $f(bar((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_m, \alpha_m))) = bar((f(A_1), \alpha_1), \ldots, (f(A_m), \alpha_m))$.*

Preuve.

- Supposons f affine. Soient $A \in \mathcal{E}$ et $A' = f(A)$. Considérons le barycentre $G = bar((A_1, \alpha_1), \dots, (A_m, \alpha_m))$ d'une famille de points pondérés. Notons G' (respectivement A'_i) les images des points G (respectivement A_i) par f. On a:

$$\begin{aligned} G' &= f(G) = f(A + \overrightarrow{AG}) = f(A + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{AA_i}) = f(A) + \overrightarrow{f}(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{AA_i}) \\ &= A' + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AA_i}) = A' + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{A'A'_i}. \end{aligned}$$

  On en déduit que $\overrightarrow{A'G'} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{A'A'_i}$ et que G' est le barycentre de la famille de points pondérés $((A'_1, \alpha_1), \dots, (A'_m, \alpha_m))$.

- Réciproquement, supposons que f conserve le barycentre. Soient $A \in \mathcal{E}$ et $A' = f(A)$. Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, notons $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$ le vecteur de E' tel que $f(A + \overrightarrow{u}) = A' + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$. Montrons que l'application $\overrightarrow{f} : E \to E'$ ainsi définie est linéaire, ce qui montrera que f est affine.

  Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Considérons $M = A + \overrightarrow{u}$ et $N = A + \overrightarrow{v}$. Posons $M' = f(M)$, $N' = f(N)$. Soit $G = bar((A, 1 - \lambda - \mu), (M, \lambda), (N, \mu))$ de sorte que $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$. Par hypothèse, $G' = f(G) = bar((A', 1 - \lambda - \mu), (M', \lambda), (N', \mu))$. Alors $\overrightarrow{A'G'} = \lambda \overrightarrow{A'M'} + \mu \overrightarrow{A'N'} = \lambda \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) + \mu \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$. Comme $\overrightarrow{A'G'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AG})$, on a $\overrightarrow{f}(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) + \mu \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$.

□

Proposition 10 *Considérons toujours $\mathcal{E}'$ un deuxième $\mathbb{K}$-espace affine. Supposons $\mathcal{E}$ muni d'un repère affine $(A_0, \dots, A_n)$ et soient $(B_0, \dots, B_n)$ des points de $\mathcal{E}'$. Il existe une unique application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ telle que $f(A_i) = B_i$ pour tout i. De plus, f est un isomorphisme si et seulement si $(B_0, \dots, B_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}'$.*

Preuve. Comme $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de E, il existe une unique application linéaire $\overrightarrow{f}$ de E dans E' telle que pour tous $1 \leq i \leq n$, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{B_0B_i}$. On définit alors l'application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ tel que $f(A_0) = B_0$ et pour tous $M \in \mathcal{E}$, $f(A_0 + \overrightarrow{A_0M}) = B_0 + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0M})$. Par définition, f est affine et pour tous $0 \leq i \leq n$, $f(A_i) = B_i$.
Pour que f soit un isomorphisme, il faut et il suffit que $\overrightarrow{f}$ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels, c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{B_0B_i}$ constituent une base de E ou encore que $(B_0, \dots, B_n)$ soit un repère affine de $\mathcal{E}'$. □

2 Convexité

Dans la suite, on prendra $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$.

Proposition 11 *Soient $A, B \in \mathcal{E}$. On défini alors l'ensemble $[AB]$, appelé segment $[AB]$, comme suit:*

$$\begin{aligned} [AB] &= \{bar((A, \alpha), (B, \beta)); \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, \alpha + \beta = 1\} \\ &= \{bar((A, \alpha), (B, 1 - \alpha)); 0 \leq \alpha \leq 1\} \\ &= \{bar((A, 1 - \beta), (B, \beta)); 0 \leq \beta \leq 1\} \\ &= \{A + \lambda \overrightarrow{AB}; 0 \leq \lambda \leq 1\} \end{aligned}$$

On notera $]AB[$ l'ensemble $[AB] \setminus \{A, B\} = \{A + \lambda \overrightarrow{AB}; 0 < \lambda < 1\}$.

Définition 12 *Une partie X de $\mathcal{E}$ est dite convexe si, pour tous $A, B \in X$, $[AB] \subset X$.*

Remarque. $\emptyset$, $\mathcal{E}$ et tout sous-espace affine de $\mathcal{E}$ sont des parties convexes de $\mathcal{E}$.

Proposition 13

1. *L'adhérence et l'intérieur d'une partie convexe est convexe.*
2. *Une convexe est connexe par arcs donc connexe.*
3. *L'intersection de parties convexes est convexe.*

Preuve. La démonstration est facile et laissée au lecteur. □

Définition 14 *Soient $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{E}$. On appelle combinaison convexe des A_i un point de $\mathcal{E}$ de la forme $bar((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_m, \alpha_m))$ avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}_+^*$.*

Proposition 15 *Une partie X de $\mathcal{E}$ est convexe si et seulement si toute combinaison convexe de points de X est aussi dans X.*

Preuve.

- $\Longrightarrow$: Supposons X convexe. Montrons par récurrence sur $m \geq 1$ que toute combinaison convexe $G = bar((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_m, \alpha_m))$ de X, où $A_1, \ldots, A_m \in X$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}_+^*$, appartient à X. Si $m = 1$, alors $G = A_1 \in X$. Soit $m \geq 1$ et soit $G = bar((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_m, \alpha_m))$, où $A_1, \ldots, A_m \in X$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}_+^*$ sont tels que $\alpha_0 + \ldots + \alpha_m = 1$. Notons $G' = bar((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_{m-1}, \alpha_{m-1}))$. Par hypothèse de récurrence, $G' \in X$. Par ailleurs, par associativité du barycentre, on a $G = bar((G', \alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1}), (A_m, \alpha_m))$. Comme $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1} > 0$ et $\alpha_m > 0$, on a donc $G \in [G'A_m]$ (avec la proposition 11). Or $G', A_m \in X$ et X est convexe donc $[G'A_m] \subset X$, d'où $G \in X$.

- Supposons que toute combinaison convexe de points de X est aussi dans X et montrons que X est convexe. Soient $A, B \in X$. Par définition, les points de $[AB]$ sont des combinaisons convexes de $\{A, B\}$, et donc des combinaisons convexes de points de X. L'hypothèse implique alors que tout point de $[AB]$ est dans X, c'est-à-dire que $[AB] \subset X$.

□

Proposition 16 *L'image directe et l'image réciproque d'une partie convexe par une application affine est convexe.*

Preuve. C'est une conséquence des propriétés 9 et 15. □

Proposition 17 *Soit X une partie de $\mathcal{E}$.*

1. *L'intersection de toutes les parties convexes de $\mathcal{E}$ qui contiennent X est la plus petite partie convexe de $\mathcal{E}$ qui contient X. On l'appelle l'enveloppe convexe de X et on la note $Conv(X)$.*

2. *X est une partie convexe de $\mathcal{E}$ si et seulement si $Conv(X) = X$.*

3. *Si Y est une partie de $\mathcal{E}$ telle que $X \subset Y$, alors $Conv(X) \subset Conv(Y)$.*

Preuve.

1. Notons $\mathcal{C}_X$ l'ensemble de toutes les parties convexes de $\mathcal{E}$ qui contiennent X et $\mathcal{C} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}_X} C$. Comme tout $C \in \mathcal{C}_X$ contient X, $X \subset \mathcal{C}$. Et le troisième point de la proposition 13 implique que $\mathcal{C}$ est un convexe. Soit Y un convexe contenant X. Alors $Y \in \mathcal{C}_X$ et donc $\mathcal{C} \subset Y$.

2. Si X est convexe, alors $X \in \mathcal{C}_X$ et donc $Conv(X) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}_X} C \subset X$. Comme on a toujours $X \subset Conv(X)$, on a l'égalité. Réciproquement, $X = Conv(X)$ et $Conv(X)$ est convexe par définition. Donc X est convexe.

3. Comme $Y \subset Conv(Y)$, $X \subset Conv(Y)$ et par minimalité de $Conv(X)$, on en déduit que $Conv(X) \subset Conv(Y)$.

□

Proposition 18 *Soit X une partie de $\mathcal{E}$. Alors $Conv(X)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de points de X. Autrement dit,*

$$Conv(X) = \{bar((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_m, \alpha_m)); m \in \mathbb{N}^*, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}_+^*, A_1, \ldots, A_m \in X\}.$$

Preuve. Notons Δ l'ensemble

$$\{bar((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_m, \alpha_m)); m \in \mathbb{N}^*, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}_+^*, A_1, \ldots, A_m \in X\}.$$

- $\Delta \subset Conv(X)$: $Conv(X)$ est convexe donc la proposition 15 implique que toute combinaison convexe de points de $Conv(X)$, et en particulier ceux de X, est dans $Conv(X)$.

- $Conv(X) \subset \Delta$: Il suffit de montrer que Δ est une partie convexe contenant X.

  $X \subset \Delta$ car tout $A \in X$ peut s'écrire $A = bar((A, 1))$.

  Montrons que Δ est convexe. Soit $A, B \in \Delta$ et montrons que $[AB] \subset \Delta$. Soit $G = bar((A, \lambda), (B, \mu))$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ tel que $\lambda + \mu > 0$. Par définition de Δ, il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n \in X$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $A = bar((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_m, \alpha_m))$ et $B = bar((B_1, \beta_1), \ldots, (B_n, \beta_m))$. La propriété d'homogénéité des barycentres permet de supposer que $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$. Alors

  - Si $\lambda = 0$, $G = bar((A, \lambda), (B, \mu)) = B \in \Delta$. De même si $\mu = 0$.
  - Si λ et $\mu > 0$. Alors

    $$\begin{aligned} & bar((A_1, \lambda\alpha_1), \ldots, (A_m, \lambda\alpha_m), (B_1, \mu\beta_1), \ldots, (B_n, \mu\beta_n)) \\ = \; & bar\left((bar((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_m, \alpha_m)), \lambda), (bar((B_1, \beta_1), \ldots, (B_n, \beta_n)), \mu)\right) \\ = \; & bar((A, \lambda), (B, \mu)) \\ = \; & G, \end{aligned}$$

    en utilisant l'associativité du barycentre à la première égalité et l'homogénéité de barycentre à la deuxième. Ainsi, G est bien exprimé comme un élément de Δ.

$\square$

Exemples. $Conv(\emptyset) = \emptyset$, et pour $A, B, C \in \mathcal{E}$ non alignés, on a

- $Conv(\{A\}) = \{A\}$.
- $Conv(\{A, B\}) = [AB]$.
- $Conv(\{A, B, C\})$ est le triangle ABC dans le plan affine engendré par A, B, C.