Chapitre 2

Fonctions usuelles d'une variable réelle

2.1 Généralités sur les fonctions

2.1.1 Fonctions et applications

Définition 2.1.1 — *Etant donnée une partie D de $\mathbb{R}$, on appelle* **fonction** *de D dans $\mathbb{R}$ toute correspondance qui à tout nombre x de D associe au plus un nombre réel y et on note : $f : D \to \mathbb{R}$*

Il est possible qu'a un élément x de D ne corresponde aucun nombre réel. Lorsqu'à un élément x de D est associé le réel y, on note $y = f(x)$, y est appelé **image** *de x par f et x* **antécédent** *de y par f. D est l'ensemble de départ, $\mathbb{R}$ l'ensemble d'arrivée et l'ensemble des éléments x de D possédant une image est l'ensemble de définition de f noté D_f.*

Définition 2.1.2 — *On appelle* **application** *de D dans $\mathbb{R}$ toute fonction pour laquelle $D_f = D$. Dans ce cas, on note $f(D)$ l'ensemble des images des éléments de D par f, soit :*

$$f(D) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in D\ ,\ y = f(x)\}$$

Une fonction f est la plupart du temps donnée par l'expression de $f(x)$, par exemple :

$$x \longmapsto \ln(x^2 - 1)\ \ ,\ \ x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}\ \ ,\ \ x \longmapsto \sqrt{x^2 - \sin x}$$

Dans ce cas, il faudra toujours commencer par préciser l'ensemble de définition de f, c'est-à-dire l'ensemble de tous les réels x pour lesquels $f(x)$ a un sens. Dans le premier cas ci-dessus, on a par exemple :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}\ \mid\ |x| > 1\} =]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[$$

L'ensemble des applications de D dans $\mathbb{R}$ sera noté $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^D$.

Définition 2.1.3 — *Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ et D_0 une partie de D. On appelle* **restriction** *de f à D_0 l'application de D_0 dans $\mathbb{R}$, notée $f_{|D_0}$ et définie par :*

$$f_{|D_0}\ :\ D_0 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto f(x)$$

2.1.2 Opérations dans $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$

Définition 2.1.4 — *Soit deux applications f et g de D dans $\mathbb{R}$.*

- *On dit qu'elles sont* **égales** *si et seulement si : $\forall\, x \in D\ ,\ f(x) = g(x)$.*
- *L'application* **somme** *$f + g$ est définie sur D par : $\forall\, x \in D\ ,\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.*
- *L'application* **produit** *fg est définie sur D par : $\forall\, x \in D\ ,\ (fg)(x) = f(x)g(x)$.*

– *Pour tout λ réel, l'application λf est définie sur D par :* $\forall x \in D\ ,\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
– *L'application $|f|$ est définie sur D par :* $\forall x \in D\ ,\ (|f|)(x) = |f(x)|$.
– *Si $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$, l'application $\dfrac{1}{f}$ est définie sur D par :*

$$\forall x \in D\ ,\ \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

REMARQUE — La relation d'ordre $\leqslant$ définie sur $\mathbb{R}$ s'étend naturellement à $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ en posant pour tout $(f,g) \in (\mathcal{F}(D,\mathbb{R}))^2$:

$$f \leqslant g \Longleftrightarrow \forall x \in D\ ,\ f(x) \leqslant g(x)$$

Par exemple si f, g, h sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1 + x^2$ et $h(x) = 1 + x$, on a $f \leqslant g$, mais l'inégalité $f \leqslant h$ est fausse.

2.1.3 Composition d'applications

Définition 2.1.5 — *Soit D et E deux parties de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$. Si $f(D) \subset E$, l'application :*

$$D \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto g[f(x)]$$

est appelée ***composée*** *de f par g et notée $g \circ f$.*

REMARQUES — 1 - Ne pas confondre $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ et $(gf)(x) = g(x)f(x)$.

2 - Si $g \circ f$ est définie, $f \circ g$ ne l'est peut-être pas (il suffit pour cela que la condition $g(E) \subset D$ ne soit pas réalisée) et même si elle l'est on a en général $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$.

EXEMPLE — Considérons les fonctions f et g données par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = 1 + x$. Alors $D_f =]0,+\infty[$, $D_g = \mathbb{R}$. Comme $f(D_f) \subset D_g$, l'application $g \circ f$ est définie sur D_f par :

$$g \circ f\ :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto g[f(x)] = 1 + \ln x$$

Mais pour que $f[g(x)] = \ln(1 + x)$ ait un sens, il faut que x appartienne à l'intervalle $]-1,+\infty[$ et on a alors :

$$f \circ g\ :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto f[g(x)] = \ln(1 + x)$$

D'une manière générale, on notera que : $D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \ \text{ et } \ f(x) \in D_g\}$

Proposition 2.1.1 — **Dérivation d'une fonction composée** — *Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(J,\mathbb{R})$ avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est définie sur I. Soit $a \in I$.*

Si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$, $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = g'[f(a)] \times f'(a) = (g' \circ f)(a) \times f'(a)}$$

PREUVE — Définissons la fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si} \quad x \neq a \\ f'(a) & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

et la fonction ψ de J dans $\mathbb{R}$ par :

$$\psi\ :\ J \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ y \longmapsto \begin{cases} \dfrac{g(y) - g[f(a)]}{y - f(a)} & \text{si} \quad y \neq f(a) \\ g'[f(a)] & \text{si} \quad y = f(a) \end{cases}$$

Puisque f est dérivable en a :

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = f'(a) = \varphi(a)$$

Donc φ est continue en a et de même, puisque g est dérivable en $f(a)$, ψ est continue en $f(a)$. Pour tout $x \in I$ on peut écrire :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] = g[f(a)] + (f(x) - f(a))\psi[(f(x))] \\ &= (g \circ f)(a) + (x - a)\varphi(x)\psi[f(a) + (x - a)\varphi(x)]\end{aligned}$$

Soit

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \varphi(x)\psi[f(a) + (x - a)\varphi(x)]$$

d'où il résulte par continuité de φ en a et de ψ en $f(a)$:

$$\lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \varphi(a)\psi[f(a)] = f'(a)g'[f(a)]$$

Ceci montre que $g \circ f$ est dérivable en a avec :

$$(g \circ f)'(a) = g'[f(a)] \times f'(a)$$

□

2.1.4 Parité

Définition 2.1.6 — *Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. On dit que :*
f est ***paire*** *si : $\forall\, x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$*
f est ***impaire*** *si : $\forall\, x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$*

EXEMPLE — La fonction $f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1 + 2e^x}{2 + e^x}\right)$ est impaire.

REMARQUES — 1 - f ne peut être paire ou impaire que si son domaine de définition D est symétrique par rapport à 0.

2 - Si f est impaire et si $0 \in D$, $f(0) = 0$, mais f peut très bien être impaire et non définie en 0.

3 - Une fonction f peut n'être ni paire ni impaire, par exemple $x \longmapsto \ln x$.

4 - Notons C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé Oxy. Alors :

a) Si f est paire, C_f est symétrique par rapport à Oy.

b) Si f est impaire, C_f est symétrique par rapport à O.

2.1.5 Périodicité

Définition 2.1.7 — *Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.*
1 - Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est T-périodique si :

$$\forall\, x \in D\ ,\ x + T \in D \text{ et } f(x + T) = f(x)$$

On dit alors que T est une période de f.
2 - On dit que f est périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit T-périodique.

EXEMPLES — 1 - $x \longmapsto \sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$, 4π-périodique, mais aussi 2π-périodique.

2 - $f \ : \ x \longmapsto E(x) - x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique. En effet si $E(x)$ est la partie entière de x, on a :

$$E(x) \leqslant x < E(x)+1 \Longrightarrow E(x)+1 \leqslant x+1 < E(x)+2 \Longrightarrow E(x+1) = E(x)+1$$

D'où

$$f(x+1) = E(x+1) - (x+1) = E(x)+1-(x+1) = E(x) - x = f(x)$$

REMARQUE — Si f est T-périodique, C_f est invariante par translation de vecteur $T\overrightarrow{\imath}$ si $\overrightarrow{\imath}$ est un vecteur unitaire de Ox.

2.1.6 Monotonie

Définition 2.1.8 — *Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$. f est dite :*
croissante *si : $\forall\,(x,y) \in D^2$, $(x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y))$*
décroissante *si : $\forall\,(x,y) \in D^2$, $(x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y))$*
strictement croissante *si : $\forall\,(x,y) \in D^2$, $(x < y \Longrightarrow f(x) < f(y))$*
strictement décroissante *si : $\forall\,(x,y) \in D^2$, $(x < y \Longrightarrow f(x) > f(y))$*
monotone *si f est croissante ou décroissante.*
strictement monotone *si f est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Proposition 2.1.2 — *Soit $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ avec $f(D) \subset E$. Alors $g \circ f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ et si f et g sont monotones (resp. strictement monotones), $g \circ f$ est aussi monotone (resp. strictement monotone)*

PREUVE — En notant $\nearrow$ pour « croissante »et $\searrow$ pour « décroissante », pour $(x,y) \in D^2$ tel que $x \leqslant y$, le tableau ci-dessous récapitule les quatre cas possibles :

	$f \nearrow$	$f \searrow$
	$f(x) \leqslant f(y)$	$f(x \geqslant f(y)$
$g \nearrow$	$g[f(x)] \leqslant g[f(y)]$	$g[f(x)] \geqslant g[f(y)]$
$g \searrow$	$g[f(x)] \geqslant g[f(y)]$	$g[f(x)] \leqslant g[f(y)]$

Dans le cas de la stricte monotonie, on a le même résultat avec des inégalités strictes. □

2.1.7 Fonction réciproque

En pratique, les fonctions que nous aurons à étudier auront pour ensemble de définition, soit un intervalle de $\mathbb{R}$, soit une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$. Dans toute la suite I désignera toujours un intervalle de $\mathbb{R}$, borné ou non, par exemple :

$$I = [-1,+1] \ \text{ ou } \ I =]-\infty,+1] \ \text{ ou } \ I =]-3,+\infty[\ \text{ ou } \ I =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$$

On notera qu'une réunion d'intervalles n'est pas nécessairement un intervalle : $[-1,0[\cup[3,+\infty[$, $\mathbb{R}^*$, ne sont pas des intervalles.

Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, continue et strictement monotone sur I. Alors on démontre que $f(I)$ est un intervalle et que pour tout y élément de $f(I)$, il existe x unique élément de I tel que $y = f(x)$.

Cette dernière propriété s'énonce en disant que f est une bijection de I sur $f(I)$. On peut alors définir une fonction de $f(I)$ dans I, notée f^{-1} et appelée fonction réciproque de f :

$$f^{-1} \ : \ f(I) \longrightarrow I \ , \ y \longmapsto x \ \text{ tel que } \ y = f(x)$$

On a ainsi la caractérisation suivante :

$$\forall x \in I \ , \ y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

On démontre aussi que f^{-1} est continue sur $f(I)$, strictement monotone et de même sens de monotonie que f.

REMARQUE — Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les courbes représentatives C_f et $C_{f^{-1}}$ de f et f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice des axes ayant pour équation $y = x$, puisque :

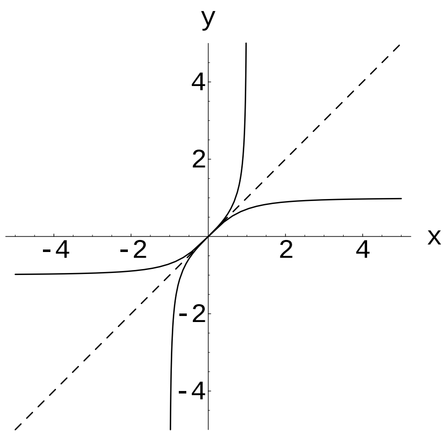
$$M(x, y) \in C_f \Longleftrightarrow M'(y, x) \in C_{f^{-1}}$$

EXEMPLE — Soit $f \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

L'étude des variations de f montre que f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]-1, +1[$. Donc f admet la fonction réciproque f^{-1} telle que :

$$f^{-1} \ :]-1, +1[\longrightarrow \mathbb{R} \ , \ x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Les représentations graphiques de f et f^{-1} sont données ci-dessous :



Proposition 2.1.3 — Dérivation d'une fonction réciproque — *Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une bijection de I sur J et $a \in I$. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors la fonction réciproque de f, $f^{-1} \ : \ J \longrightarrow I$ est dérivable en $b = f(a)$ et on a :*

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(b)]} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(b)}}$$

PREUVE — Si on note $b = f(a)$, alors $a = f^{-1}(b)$ et pour tout $y \in J \setminus b$, on peut écrire :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)} = \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}}$$

Comme f^{-1} est continue en $b = f(a)$, on a $\lim\limits_{y \to f(a)} f^{-1}(y) = a$ et comme f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, il vient :

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

Ceci montre que f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ avec $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$. $\square$

REMARQUE — La formule à retenir pour la dérivation d'une fonction réciproque est :

$$\boxed{(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

EXEMPLE — Avec l'exemple précédent, la fonction f est dérivable en tout x réel avec :

$$f'(x) = (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} \neq 0$$

Donc f^{-1} est dérivable en tout point de $]-1, +1[$. Si l'on prend x pour variable de la fonction f^{-1}, c'est-à-dire si l'on note $y = f^{-1}(x)$ et $x = f(y)$, on a pour tout $x \in]-1, +1[$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)} = \frac{1}{f'(y)} = (1 + y^2)^{\frac{3}{2}} = \left[1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

2.2 Représentation graphique

L'objet de ce paragraphe est de compléter et approfondir les connaissances acquises en Terminale à propos de la représentation graphique d'une fonction donnée par son expression $y = f(x)$.

2.2.1 Plan général d'étude d'une fonction f

De manière systématique, on abordera successivement les étapes suivantes :

1° Détermination de l'ensemble de définition D_f.

2° Réduction éventuelle de cet ensemble D_f par des considérations de parité ou périodicité pour obtenir un ensemble d'étude D_e.

3° Calcul des limites éventuelles de f aux bornes des intervalles constituant l'ensemble d'étude.

4° Etude des variations de f sur D_e grâce à l'étude du signe de la dérivée de f et résumé des résultats dans un tableau de variations.

5° Etude s'il y a lieu des branches infinies de la courbe C_f représentative de f dans un repère Oxy (en général orthonormé).

6° Tracé de la courbe C_f. Ce tracé doit au minimum faire apparaitre les tangentes aux différents points caractéristiques de l'étude ainsi que les asymptotes éventuelles.

2.2.2 Branches infinies

Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$(resp. $-\infty$), C_f admet une asymptote parallèle à Oy d'équation $x = a$.

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$, C_f admet une asymptote parallèle à Ox d'équation $y = b$.

Lorsque x et $f(x)$ tendent tous deux vers l'infini, il y a lieu d'étudier le comportement de la branche infinie de C_f correspondante. Dans la suite de ce paragraphe, nous allons faire l'étude lorsque x tend vers $+\infty$: on aurait naturellement des résultats analogues lorsque x tend vers $-\infty$.

Définition 2.2.1 — *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$, C_f et C_g leurs courbes représentatives. On dit que les courbes C_f et C_g sont asymptotes lorsque x tend vers $+\infty$ si* $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$

Géométriquement, cette définition signifie que C_f et C_g se rapprochent indéfiniment l'une de l'autre lorsque x tend vers $+\infty$. En particulier si $g(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$, C_g est une droite non parallèle aux axes et on dit dans ce cas que C_f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

Pour étudier l'existence d'une asymptote oblique, on commence par étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si cette limite est finie et non nulle, on note a sa valeur, puis on s'intéresse à $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax]$. Si cette limite est finie on note b sa valeur et on a donc dans ces conditions :

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax - b] = 0$$

ce qui signifie que C_f est asymptote à la droite d'équation $y = ax + b$. Le signe de la différence $f(x) - ax - b$ au voisinage de $+\infty$ donnera la position de la courbe par rapport à l'asymptote : C_f est au-dessus de l'asymptote si $f(x) - ax - b > 0$ et C_f est au-dessous de l'asymptote si $f(x) - ax - b < 0$.

Définition 2.2.2 — *Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. et C_f sa courbe représentative.*

- *Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$(resp. $-\infty$), on dit que C_f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction Oy.*
- *Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = +\infty$(resp. $-\infty$) on dit que C_f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dans la direction de pente a. En particulier si $a = 0$, la branche parabolique est de direction Ox.*

2.2.3 Tangente en un point

Soit f définie sur un intervalle I et $a \in I$. On rappelle que f est dérivable en a si la fonction τ_a, appelée taux d'accroissement (ou taux de variation) de f en a et définie sur $I \setminus \{a\}$ par :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie en a. Cette limite s'appelle alors nombre dérivé de f en a (ou plus simplement dérivée de f en a et se note $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.

EXEMPLE — La fonction $f \,:\, x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$.

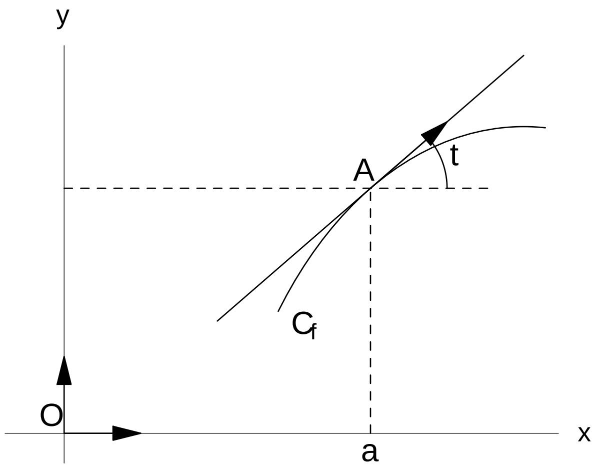
- Si $a > 0$, f est dérivable en a et $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ car :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

- En 0, f n'est pas dérivable, car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$

La dérivabilité de f en a se traduit géométriquement par l'existence d'une tangente non parallèle à $(O, \vec{\jmath})$ à la courbe C_f représentative de f dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ au point $A(a, f(a))$. $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente : si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la tangente et si on note $t = (\vec{\imath}, \vec{u})$, alors $f'(a) = \tan t$

Si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, la courbe C_f admet en A une tangente parallèle à $(O, \vec{\jmath})$: dans ce cas $t = \pm\frac{\pi}{2}$.



Dans certains cas, il peut être plus facile de calculer $\lim_{x \to a} f'(x)$ que $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Alors, en supposant f continue en a, on démontre les résultats suivants :

- Si $\lim_{x \to a} f'(x) = l$, f est dérivable en a et $f'(a) = l$. Dans ce cas C_f admet une tangente au point $A(a, f(a))$ de pente l.
- Si $\lim_{x \to a} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$. Dans ce cas C_f admet une tangente au point $A(a, f(a))$ parallèle à $(O, \overrightarrow{\jmath})$.
- Si $\lim_{x \to a} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$. Dans ce cas aussi, C_f admet une tangente au point $A(a, f(a))$ parallèle à $(O, \overrightarrow{\jmath})$.

On retiendra donc que pour déterminer la tangente au point $A(a, f(a))$, on aura le choix d'étudier la limite du taux d'accroissement de f en a ou bien la limite en a de la dérivée de f.

2.2.4 Exemple d'étude d'une fonction

Soit la fonction f donnée par $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 - 1}$.

L'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty, -1] \cup [+1, +\infty[$.

Comme la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$, f est continue sur D_f et dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[$ avec :

$$\forall x \in]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[\ ,\ f'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2\sqrt{x^2 - 1} - x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Sur $]-\infty, -1[$, f' est toujours positive, tandis que sur $]+1, +\infty[$, f' s'annule en $\frac{2}{\sqrt{3}}$, est négative sur $\left]-1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right[$ et positive sur $\left]\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$.

Les limites de f en $\pm\infty$ sont données par :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\ ,\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - (x^2 - 1)}{2x + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x\left[2 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right]} = +\infty$$

On peut alors dresser le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		-1	$+1$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
f'		$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	2	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Il y a lieu d'étudier les branches infinies de C_f en $+\infty$ et $-\infty$. On peut écrire pour tout $x \in D_e$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x - \sqrt{x^2-1}}{x} = 2 - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 2 - \frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

D'où :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

En $-\infty$:

$$f(x) - 3x = -x - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}-x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

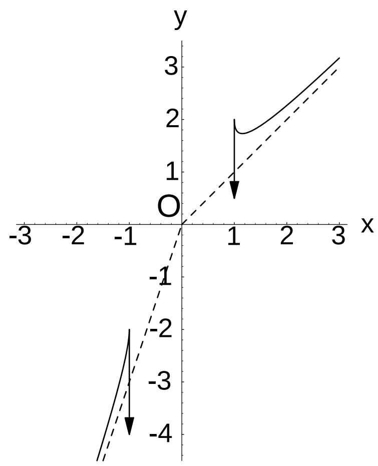
Ceci montre que la courbe C_f est asymptote lorsque x tend vers $-\infty$ à la droite d'équation $y = 3x$ et est située au-dessus de cette asymptote.

En $+\infty$:

$$f(x) - x = x - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

De même la courbe C_f est asymptote lorsque x tend vers $+\infty$ à la droite d'équation $y = x$ et est située au-dessus de cette asymptote.

En remarquant enfin que $\lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^+} f'(x) = +\infty$, on voit que la courbe C_f a l'allure ci-dessous :



2.3 La fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien notée $\ln$ a été introduite en Terminale. Rappelons que c'est la primitive définie sur $]0, +\infty[$ et s'annulant en 1 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. Ainsi, par définition, $\ln$ est une fonction dérivable, et donc continue, telle que :

$$\forall\, x \in]0, +\infty[\ ,\ (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$

Ceci montre en particulier que $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

REMARQUE — Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur I, la fonction $x \longmapsto \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I avec :

$$\forall\, x \in I\ ,\ \frac{d}{dx}[\ln|u(x)|] = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

En effet, u ne s'annulant pas sur I garde un signe constant sur I et en considérant les deux cas u positive et u négative, le résultat découle de la dérivabilité des fonctions composées.

Rappels des propriétés de la fonction $\ln$ **:**

• $\forall\,(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2\ ,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y$

• $\forall\,(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2\ ,\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y.$

• $\forall\,y \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln y.$

• $\forall\,n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \forall\,(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n\ ,\ \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$ (démonstration immédiate par récurrence)

• $\forall\,n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall\,x \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \ln(x^n) = n \ln x$

• $\forall\,q \in \mathbb{N}^*\ ,\ \forall\,x \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \ln x^{\frac{1}{q}} = \dfrac{1}{q} \ln x$

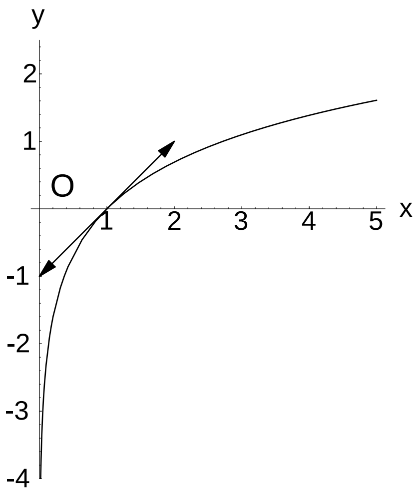
• $\forall\,r \in \mathbb{Q}\ ,\ \forall\,x \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \ln x^r = r \ln x$

• La fonction $\ln$ admet les limites suivantes :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\ ,\ \lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\ ,\ \lim_{x\to0^+} x\ln x = 0\ ,\ \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

Variations et représentation graphique de la fonction $\ln$ **:**

x	0		$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



La courbe $C_{\ln}$ admet une branche parabolique de direction Ox car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2.4 La fonction exponentielle

D'après la section précédente $\ln$ est une fonction continue et strictement croissante de $]0 + \infty[$ dans $\mathbb{R}$. Donc d'après le paragraphe **3.1.7** elle admet une fonction réciproque, appelée exponentielle et notée : $\exp\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*\ ,\ x \longmapsto \exp x$. On a ainsi :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*\ ,\ y = \exp x \Longleftrightarrow x = \ln y$$

$$\forall\,x \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \exp(\ln x) = x \quad \text{et} \quad \forall\,x \in \mathbb{R}\ ,\ \ln(\exp x) = x$$

De plus, on déduit les propriétés suivantes de celles de $\ln$:

1. $\exp$ est continue, strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ (\exp)'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp x)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\exp x}} = \exp x$$

2. $\exp 0 = 1$ car $\ln 1 = 0$

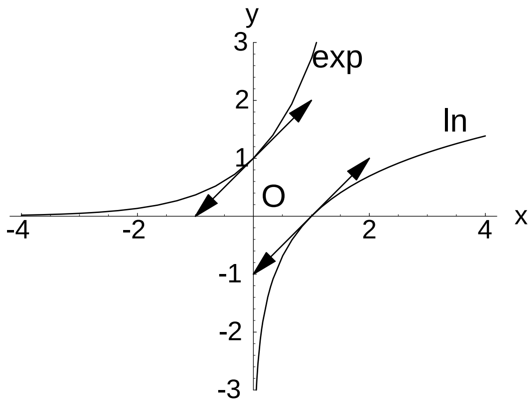
   $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \exp(-y) = \dfrac{1}{\exp y}\ ,\ \exp(x+y) = \exp x \exp y\ ,\ \exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$

   $\forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ ,\ \exp\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\exp x_i)$

   $\forall\, n \in \mathbb{Z}\ ,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ \exp(nx) = (\exp x)^n$

3. $$\boxed{\begin{gathered}\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty\ ,\ \lim_{x\to-\infty} \exp x = 0\ ,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} x\exp x = 0\ ,\ \lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1\end{gathered}}$$

La courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé est symétrique de celle de $\ln$ par rapport à la première bissectrice des axes d'équation $y = x$ et elle admet donc une branche parabolique de direction asymptotique Oy, comme indiqué sur la figure ci-contre.



Nouvelle notation

Soit e le nombre réel défini par $e = \exp 1$. Alors d'après ce qui précède, on a :

$\forall\, n \in \mathbb{Z}\ ,\ \exp n = (\exp 1)^n = e^n$

$\forall\, p \in \mathbb{Z}^*\ ,\ \left(\exp\left(\dfrac{1}{p}\right)\right)^p = \exp\left(\dfrac{p}{p}\right) = \exp 1 = e \Longrightarrow \forall\, p \in \mathbb{Z}^*\ ,\ \exp\left(\dfrac{1}{p}\right) = e^{\frac{1}{p}}$

$\forall\, r \in \mathbb{Q}\ ,\ \exp r = e^r$

En effet, si $r = \dfrac{p}{q}\ ,\ \exp r = \exp\left(\dfrac{p}{q}\right) = \left(\exp\left(\dfrac{1}{q}\right)\right)^p = (e^{\frac{1}{q}})^p = e^{\frac{p}{q}} = e^r$

Désormais nous noterons :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ \exp x = e^x$$

Cette notation est évidemment justifiée par les formules précédentes qui s'écrivent maintenant :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}\ ,\ \forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2\ ,\ e^{-b} = \frac{1}{e^b}\ ,\ e^{a+b} = e^a e^b\ ,\ e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}\ ,\ (e^a)^n = e^{na}$$

2.5 Fonctions puissances

Définition 2.5.1 — *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; on appelle* ***puissance d'exposant*** *α la fonction p_α de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$p_\alpha \ : \ x \to x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

La notation $p_\alpha(x) = x^\alpha$ est justifiée par les formules suivantes qui constituent une extension aux exposants réels des formules bien connues avec les exposants entiers ou fractionnaires.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta)\ln x} = e^{\alpha \ln x} e^{\beta \ln x} = x^\alpha x^\beta$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ , \ x^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln x} = \frac{1}{e^{\alpha \ln x}} = \frac{1}{x^\alpha}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x^{\alpha-\beta} = x^\alpha x^{-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ , \ (x^\alpha)^\beta = e^{\beta \ln(x^\alpha)} = e^{\beta \ln(e^{\alpha \ln x})} = e^{\beta\alpha \ln x} = e^{\alpha\beta \ln x} = x^{\alpha\beta}$$
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ , \ (xy)^\alpha = e^{\alpha \ln(xy)} = e^{\alpha \ln x + \alpha \ln y} = e^{\alpha \ln x} e^{\alpha \ln y} = x^\alpha y^\alpha$$
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ , \ \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = e^{\alpha \ln\left(\frac{x}{y}\right)} = e^{\alpha \ln x - \alpha \ln y} = \frac{e^{\alpha \ln x}}{e^{\alpha \ln y}} = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$$

La fonction p_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ p'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha e^{\alpha \ln x}}{e^{\ln x}} = \alpha e^{(\alpha-1)\ln x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

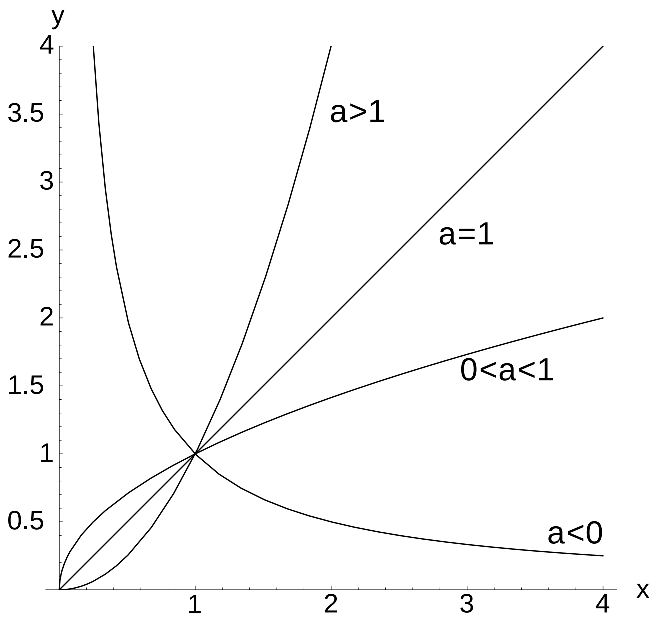
On en déduit les tableaux de variations et l'allure des courbes C_α suivant les valeurs de α :

$\alpha > 0$

x	0		$+\infty$
p'_α		$+$	
p_α	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\alpha < 0$

x	0		$+\infty$
p'_α		$-$	
p_α	$+\infty$	$\searrow$	0



Si $\alpha > 1$, p_α est dérivable en 0 et $p'_\alpha(0) = 0$. Si $0 < \alpha < 1$, p_α n'est pas dérivable en 0, car $\lim\limits_{x \to 0^+} \alpha x^{\alpha-1} = +\infty$.

La définition précédente des fonctions $x \longmapsto x^\alpha$ permet de considérer des fonctions du type $[u(x)]^{v(x)}$ où les fonctions u et v sont définies sur un intervalle I tel que la fonction u soit à valeurs strictement positive sur I. Pour étudier de telles fonctions, on reviendra à la définition sous forme exponentielle de la fonction puissance, soit :

$$[u(x)]^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$$

EXEMPLE — Soit $f(x) = (1+x)^{x^2}$. Puisque par définition $f(x) = e^{x^2\ln(1+x)}$, f est définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ et a pour dérivée sur cet intervalle :

$$f'(x) = e^{x^2\ln(1+x)}\left[2x\ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x}\right] = f(x)\left[2x\ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x}\right]$$

2.6 Comparaisons locales des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes

Proposition 2.6.1 — *1* - $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$

2 - $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x\to0^+} x^\beta|\ln x|^\alpha = 0$

3 - $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

4 - $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x|x|^\alpha = 0$

PREUVE — Dans chacun des cas, si $\alpha \leq 0$, le résultat est trivial. Considérons donc le cas $\alpha > 0$

1 - On sait déjà que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Alors, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{\beta}{\alpha}} = +\infty$, il vient :

$$\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{\ln x^{\frac{\beta}{\alpha}}}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha\left(\frac{\ln x^{\frac{\beta}{\alpha}}}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

2 - En posant $u = \dfrac{1}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to0^+} u = +\infty$ et :

$$x^\beta|\ln x|^\alpha = \left(\frac{1}{u}\right)^\beta\left|\ln\frac{1}{u}\right|^\alpha = \frac{|\ln u|^\alpha}{u^\beta} \xrightarrow[x\to0^+]{} 0 \quad \text{d'après 1}$$

3 - En posant $t = e^x$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} t = +\infty$ et :

$$\frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{t}{(\ln t)^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \quad \text{d'après 1}$$

4 - En posant $X = -x$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} X = +\infty$ et :

$$e^x|x|^\alpha = e^{-X}|X|^\alpha = \frac{|X|^\alpha}{e^X} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \quad \text{d'après 3}$$

□

On exprime ces résultats en disant que les puissances d'exposant positif l'emportent sur les puissances du logarithme en 0 et $+\infty$ et que l'exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances en $+\infty$ et $-\infty$.

REMARQUE — Dans l'application de ces règles, il faudra prendre garde de comparer logarithme, puissance ou exponentielle de la même expression. Par exemple :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2^{x^3})}{x^2} = +\infty \qquad \text{et non} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2^{x^3})}{x^2} = 0$$

Formes indéterminées du type puissance

L'étude des fonctions puissances du type : $x \longmapsto [u(x)]^{v(x)}$ fait apparaître trois nouvelles formes indéterminées qui sont :

$$0^0 \quad , \quad \infty^0 \quad , \quad 1^\infty$$

en effet en considérant le logarithme de ces trois formes, on retrouve la forme indéterminée $0 \times \infty$.

EXEMPLES — $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = \lim\limits_{X\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+X)}{X}} = e$

2.7 Fonctions hyperboliques

Définition 2.7.1 — *On appelle **sinus, cosinus, tangente et cotangente hyperboliques** les fonctions respectivement définies et notées comme suit :*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sh} \ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ x \longmapsto \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\\
&\mathrm{ch} \ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ x \longmapsto \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\\
&\mathrm{th} \ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ x \longmapsto \mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\\
&\mathrm{coth} \ : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ x \longmapsto \mathrm{coth}\, x = \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x} = \frac{1}{\mathrm{th}\, x} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}
\end{aligned}$$

De ces définitions on déduit immédiatement les formules :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ \mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x = e^x\ ,\ \mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x = e^{-x}\ ,\ \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

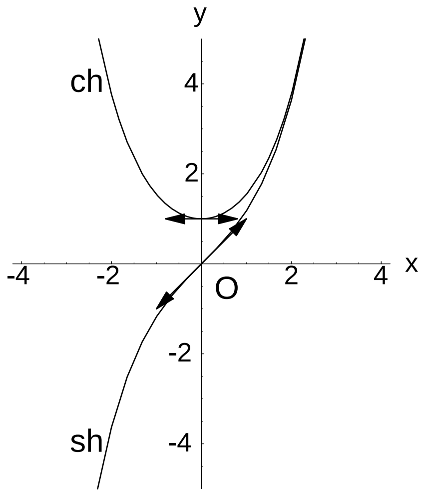
Etude des fonctions sh **,** ch **,** th

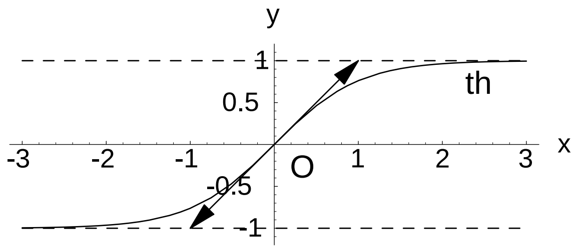
$D(\mathrm{sh}) = \mathbb{R}$	$D(\mathrm{ch}) = \mathbb{R}$	$D(\mathrm{th}) = \mathbb{R}$
Impaire	Paire	Impaire
$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ (\mathrm{sh})'(x) = \mathrm{ch}\, x$	$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ (\mathrm{ch})'(x) = \mathrm{sh}\, x$	$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ (\mathrm{th})'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x$
$\begin{array}{c\|lcr} x & 0 & & +\infty \\ \hline \mathrm{sh}' & 1 & + & \\ \hline \mathrm{sh} & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$	$\begin{array}{c\|lcr} x & 0 & & +\infty \\ \hline \mathrm{ch}' & 0 & + & \\ \hline \mathrm{ch} & 1 & \nearrow & +\infty \end{array}$	$\begin{array}{c\|lcr} x & 0 & & +\infty \\ \hline \mathrm{th}' & 1 & + & \\ \hline \mathrm{th} & 0 & \nearrow & 1 \end{array}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{sh}\, x}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{ch}\, x}{x} = +\infty$	

On a en outre les relations suivantes :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} < \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\, x \ \text{ et } \ \lim_{x\to+\infty} (\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x) = 0$$

On en déduit alors l'allure des courbes représentatives de chacune des trois fonctions dans un repère orthonormé :





2.8 La fonction Arctangente

L'application $\tan\ :\ \left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow\mathbb{R}$ est une application continue et strictement croissante avec $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[\right)=\mathbb{R}$. Elle admet donc une application réciproque, continue et strictement croissante, appelée **Arctangente** et notée : $\mathrm{Arctan}\ :\ \mathbb{R}\longrightarrow\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$ telle que :

$$\begin{array}{l}\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}\times\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[\ ,\ (y=\mathrm{Arctan}\,x\Longleftrightarrow x=\tan y)\\ \forall\,x\in\mathbb{R}\ ,\ \tan(\mathrm{Arctan}\,x)=x\\ \forall\,x\in\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[\ ,\ \mathrm{Arctan}\,(\tan x)=x\end{array}$$

Arctan est impaire comme $\tan$ et puisque $\tan$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$ et que :

$$\forall\,x\in\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[\ ,\ (\tan)'(x)=1+\tan^2 x\neq 0$$

Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$(\mathrm{Arctan}\,)'(x)=\frac{1}{(\tan)'(\mathrm{Arctan}\,x)}=\frac{1}{1+\tan^2(\mathrm{Arctan}\,x)}=\frac{1}{1+x^2}$$

Les variations de la fonction Arctangente et l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé sont donnés ci-dessous :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(\mathrm{Arctan}\,)'$		$+$	
Arctan	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$+\frac{\pi}{2}$