

Espaces vectoriels préhilbertiens complexes

Dans tout ce cours, on travaille sur le corps des complexes \mathbb{C} et E désigne un \mathbb{C} -espace vectoriel.

1 Produits scalaires et espaces préhilbertiens

1.1 Formes sesquilinéaires hermitiennes et formes quadratiques

Définition 1 *Étant donné un \mathbb{C} -espace vectoriel E , on appelle :*

1. *forme sesquilinéaire hermitienne toute application $B : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :*

- *l'application $x \in E \rightarrow B(x, y) \in \mathbb{C}$ est semi-linéaire pour tout $y \in E$: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \forall x_1, x_2, y \in E$,*

$$B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \overline{\lambda_1} B(x_1, y) + \overline{\lambda_2} B(x_2, y).$$

- *l'application $y \in E \rightarrow B(x, y) \in \mathbb{C}$ est linéaire pour tout $x \in E$: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \forall x, y_1, y_2 \in E$,*

$$B(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 B(x, y_1) + \lambda_2 B(x, y_2).$$

- *l'application B est hermitienne : $\forall x, y \in E, B(y, x) = \overline{B(x, y)}$.*

2. *forme quadratique sur E toute application $Q : E \rightarrow \mathbb{C}$ pouvant s'écrire sous la forme $Q(x) = B(x, x)$ pour au moins une forme sesquilinéaire hermitienne B .*

On la notera alors $Q = Q_B$ et on dit que c'est la forme quadratique associée à B .

Remarques. Si B est une forme sesquilinéaire hermitienne, si $Q = Q_B$ est la forme quadratique associée, on a : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x, y \in E$,

$$Q(\lambda x + \mu y) = |\lambda|^2 Q(x) + 2\operatorname{Re}(\overline{\lambda}\mu B(x, y)) + |\mu|^2 Q(y).$$

En faisant $\lambda = 1$ et $\mu = \pm 1$, on a : $\forall x, y \in E$,

$$Q(x + y) = Q(x) + 2\operatorname{Re}(B(x, y)) + Q(y)$$

$$Q(x - y) = Q(x) - 2\operatorname{Re}(B(x, y)) + Q(y)$$

En faisant $\lambda = 1$ et $\mu = \pm i$, on a : $\forall x, y \in E$,

$$Q(x + iy) = Q(x) - 2\operatorname{Im}(B(x, y)) + Q(y)$$

$$Q(x - iy) = Q(x) + 2\operatorname{Im}(B(x, y)) + Q(y)$$

On en déduit l'expression de B en fonction de Q : $\forall x, y \in E$,

$$B(x, y) = \frac{1}{4}(Q(x + y) - Q(x - y)) + \frac{i}{4}(Q(x - iy) - Q(x + iy)). \quad (1)$$

Cette seule forme sesquilinéaire hermitienne B telle que $Q = Q_B$ est la *forme polaire* de Q .

Proposition 2 *L'application $B \rightarrow Q_B$, qui associe à toute forme sesquilinéaire hermitienne B sa forme quadratique associée Q_B , réalise un isomorphisme de l'espace vectoriel des formes sesquilinéaires hermitiennes de E sur celui des formes quadratiques de E .*

Preuve. L'application $B \rightarrow Q_B$ est linéaire car si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ et B_1, B_2 sont deux formes sesquilinéaires hermitiennes, on a $Q_{\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2} = \lambda_1 Q_{B_1} + \lambda_2 Q_{B_2}$ puisque :

$$\forall x \in E, (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)(x, x) = \lambda_1 B_1(x, x) + \lambda_2 B_2(x, x).$$

L'application $B \rightarrow Q_B$ est bijective car pour toute forme quadratique Q , il existe une forme sesquilinéaire hermitienne B telle que $Q = Q_B$, autrement dit telle que $Q(x) = B(x, x)$ pour tout x . B est nécessairement unique car donnée par la relation (1). □

Remarque. Comme $\overline{B(x, x)} = B(x, x)$, pour tout vecteur $x \in E$, la forme quadratique $Q_B(x) = B(x, x) \in \mathbb{R}$.

Définition 3 On considère une forme sesquilinéaire hermitienne B sur E et la forme quadratique associée $Q_B : E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que la forme sesquilinéaire hermitienne B , ou quadratique Q_B est:

- positive si pour tout $x \in E$, $Q_B(x) = B(x, x) \geq 0$.
- définie positive si pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $Q_B(x) = B(x, x) > 0$.
- négative si pour tout $x \in E$, $Q_B(x) = B(x, x) \leq 0$.
- définie négative si pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $Q_B(x) = B(x, x) < 0$.

Proposition 4 (Cauchy-Schwartz) Soient une forme sesquilinéaire hermitienne B sur E et la forme quadratique associée Q_B . Si B est positive (et donc Q_B aussi), alors: $\forall x, y \in E$,

$$|B(x, y)| \leq \sqrt{Q_B(x)}\sqrt{Q_B(y)}.$$

Cette inégalité est une égalité lorsque x et y sont proportionnels, et c'est le seul cas d'égalité si B est de plus définie positive.

Preuve. Considérons la fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie pour tout complexe λ par:

$$f(\lambda) = Q_B(\lambda x - y) = |\lambda|^2 Q_B(x) - 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}B(x, y)) + Q_B(y).$$

Cette fonction est à valeurs positives puisque la forme quadratique Q_B est positive. En choisissant $\lambda = te^{i\theta}$ où t est un réel et où θ désigne un argument de $B(x, y)$, on a:

$$f(\lambda) = t^2 Q_B(x) - 2t |B(x, y)| + Q_B(y).$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

- si $Q_B(x) \neq 0$, la fonction f est un polynôme du second degré à valeurs positives, d'où:

$$\Delta = 4((B(x, y))^2 - Q_B(x)Q_B(y)) \leq 0.$$

On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|B(x, y)| \leq \sqrt{Q_B(x)}\sqrt{Q_B(y)}.$$

- Si $Q_B(x) = 0$, on a $f(te^{i\theta}) = -2tB(x, y) + Q_B(y)$ et f est à valeurs positives. On en déduit que $B(x, y) = 0$, sinon f changerait de signe sur \mathbb{R} . On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwartz, qui s'écrit $0 \leq 0$.

Si x et y sont liés, on a bien entendu l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Si on suppose de plus Q_B définie positive, c'est le seul cas où l'égalité est réalisée car si $x = 0_E$, alors x et y sont liés, et si $x \neq 0_E$, l'égalité signifie $\Delta = 0$, ce qui établit que le trinôme f a une racine double λ_0 et $Q_B(\lambda_0 x - y) = 0$, d'où $y = \lambda_0 x$. \square

1.2 Produits scalaires complexes

Définition 5 On appelle produit scalaire sur E toute forme sesquilinéaire hermitienne définie positive, qu'on notera en général $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On dit qu'un tel couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien complexe, et qu'il est hermitien si de plus l'espace vectoriel E est de dimension finie.

Exemples

- Le produit scalaire canonique sur \mathbb{C}^n est défini par :

$$\langle x, y \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_n y_n.$$

- Soit $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, strictement positive sur $]a, b[$. Alors on définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ en posant:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)}g(t)\omega(t)dt.$$

On vérifie que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est sesquilinéaire hermitienne, définie positive.

Proposition 6 Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E , on peut définir une norme sur E , dite norme hilbertienne ou hermitienne associée, en posant:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Preuve. L'application $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est bien une norme car:

- $\forall x \in E$, si $\|x\| = 0$ alors $x = 0_E$ car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in E$, $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|$.
- Il reste à établir l'inégalité triangulaire pour $x, y \in E$. Comme $Re(\langle x, y \rangle) \leq |\langle x, y \rangle|$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2Re(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

□

Proposition 7 Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E , alors la norme associée vérifie l'égalité suivante, appelée égalité du parallélogramme: $\forall x, y \in E$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Preuve. Laissée en exercice.

□

2 Orthogonalité

Dans la suite, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien complexe.

2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 8 • On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$.

- On dit qu'une famille de vecteurs $(v_i)_{i \in I}$ de E est orthogonale si:

$$\forall i, j \in I, i \neq j, \langle v_i, v_j \rangle = 0.$$

- Une famille orthogonale de vecteurs $(v_i)_{i \in I}$ de E est orthonormale si de plus pour tout $i \in I$, $\langle v_i, v_i \rangle = 1$.

Proposition 9 (Théorème de Pythagore) Pour toute famille orthogonale de vecteurs (v_1, \dots, v_k) de E , on a:

$$\left\| \sum_{i=1}^k v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^k \|v_i\|^2.$$

Preuve. Les propriétés du produit scalaire et l'orthogonalité des vecteurs v_1, \dots, v_k donnent :

$$\left\| \sum_{i=1}^k v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^k \|v_i\|^2.$$

Remarque. On sait que $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re(\langle x, y \rangle)$. Si x et y sont orthogonaux, on a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ mais la réciproque est fausse.

□

Proposition 10 Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls $(v_i)_{i \in I}$ de E est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Preuve. Formons une combinaison linéaire nulle de la famille orthogonale de vecteurs $(v_i)_{i \in I}$ de E : soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires presque nulle telle que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0_E.$$

En faisant le produit scalaire par un vecteur v_j , $j \in I$, on a:

$$\left\langle v_j, \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \right\rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle v_j, v_i \rangle = 0.$$

Par orthogonalité de la famille $(v_i)_{i \in I}$, il reste $\lambda_j \|v_j\|^2 = 0$, d'où $\lambda_j = 0$ car $v_j \neq 0_E$. \square

2.2 Existence de bases orthonormales en dimension finie

Définition 11 On appelle base orthonormale de E toute famille orthonormale de vecteurs $(e_i)_{i \in I}$ formant une base de E .

Remarques.

- Comme une famille orthonormale est nécessairement libre, une telle famille forme une base orthonormale de E si et seulement si elle est génératrice dans E .
- En particulier, si E est de dimension finie n , alors une famille orthonormale de n vecteurs de E forme nécessairement une base orthonormale de E .

Proposition 12 Tout espace préhilbertien complexe de dimension finie (c'est-à-dire tout espace hermitien) non réduit au vecteur nul admet des bases orthonormales.

Preuve. Raisonnons par récurrence sur la dimension de E .

Si E est de dimension 1, il suffit de prendre un vecteur unitaire.

Montrons que, si un espace préhilbertien de dimension $n - 1$ admet des bases orthonormales, un espace préhilbertien E de dimension n admet aussi des bases orthonormales. Soit e_n un vecteur unitaire de E . L'application $x \rightarrow \langle e_n, x \rangle$ est une forme linéaire et son noyau H est un hyperplan de E . D'après l'hypothèse de récurrence, H admet au moins une base orthonormale (e_1, \dots, e_{n-1}) . On vérifie enfin que $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ est une famille orthonormale de E de n vecteurs, donc une base orthonormale de E . \square

Il existe une version "orthonormale" du théorème de la base incomplète:

Proposition 13 Toute famille orthonormale d'un espace préhilbertien E de dimension finie peut être complétée en une base orthonormale de E .

Preuve. Toute famille orthonormale (e_1, \dots, e_p) est libre donc $p \leq n$. Pour la compléter en une base orthonormale de E , on cherche des vecteurs orthogonaux à e_1, \dots, e_p qui appartiennent donc à $H_1 \cap \dots \cap H_p$ où H_k est l'hyperplan noyau de la forme linéaire $x \rightarrow \langle e_k, x \rangle$.

L'intersection de ces p hyperplans indépendants H_k est un sous-espace de dimension $n - p$ qui admet une base orthonormale (e_{p+1}, \dots, e_n) . Montrons que la famille (e_1, \dots, e_n) est orthonormale:

- si $1 \leq i < j \leq p$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ car (e_1, \dots, e_p) est orthonormale.
- si $1 \leq i \leq p < j \leq n$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ car $e_j \in H_1 \cap \dots \cap H_p \subset H_i$.
- si $p < i < j \leq n$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ car (e_{p+1}, \dots, e_n) est orthonormale.

Ainsi, (e_1, \dots, e_n) est une famille orthonormale de n vecteurs, c'est donc une base orthonormale de E . \square

Proposition 14 On suppose que E est de dimension finie n rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout couple $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ de E , on a:

$$\langle x, y \rangle = \overline{x_1} y_1 + \dots + \overline{x_n} y_n \text{ et } \|x\|^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2.$$

De plus, pour tout x dans E , on a :

$$x = \langle e_1, x \rangle e_1 + \dots + \langle e_n, x \rangle e_n.$$

Preuve.

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{x_i} y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i.$$

On en déduit en particulier $\|x\|^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2$.

De plus, en faisant le produit scalaire de x avec les e_k , on a:

$$\langle e_k, x \rangle = \left\langle e_k, \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\rangle = \sum_{i \in I} x_i \langle e_k, e_i \rangle = x_k.$$

On en déduit $x = \langle e_1, x \rangle e_1 + \dots + \langle e_n, x \rangle e_n$. □

2.3 Sous-espaces orthogonaux et projecteurs orthogonaux

Définition 15 On appelle orthogonal d'une partie non vide A de E l'ensemble A^\perp des vecteurs x orthogonaux à tous les vecteurs de A , c'est-à-dire:

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}.$$

Remarques.

- $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$. En effet, pour la deuxième égalité, si $x \in E^\perp$, comme $x \in E$, x est orthogonal à lui-même, donc $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 0$ et $x = 0_E$.
- Ainsi, on a l'équivalence suivante:

$$(\forall a \in E, \langle a, x \rangle = \langle a, y \rangle) \iff (x = y).$$

En effet, si $\forall a \in E, \langle a, x \rangle = \langle a, y \rangle$, alors $x - y$ est orthogonal à tout vecteur $a \in E$, donc $x - y \in E^\perp = \{0_E\}$ et $x = y$.

Proposition 16 L'orthogonal A^\perp d'une partie non vide A de E est un sous-espace vectoriel de E , et on a l'inclusion $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Lorsque A est un sous-espace vectoriel de E , la somme $A \oplus A^\perp$ est directe.

Preuve.

- L'ensemble A^\perp est non vide car $0_E \in A^\perp$. Il est stable par combinaison linéaire: Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, si $x, y \in A^\perp$, alors $\forall a \in A$,

$$\langle a, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle a, x \rangle + \mu \langle a, y \rangle = 0.$$

- On a $A \subset (A^\perp)^\perp$ car si $a \in A, \forall x \in A^\perp$,

$$\langle a, x \rangle = 0, \text{ donc } \langle x, a \rangle = 0$$

et on en déduit que $a \in (A^\perp)^\perp$, ce qui établit l'inclusion.

- La somme $A + A^\perp$ est direct puisque $A \cap A^\perp = \{0_E\}$. En effet, si $x \in A \cap A^\perp$, on a $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 0$ donc $x = 0_E$. □

Remarques. Lorsque F est un sous-espace vectoriel de E et E de dimension finie, on montrera que $F = (F^\perp)^\perp$ et $E = F \oplus F^\perp$. Par contre, en dimension infinie, ces égalités ne sont plus toujours vérifiées.

Définition 17 On dit que les sous-espaces d'une famille $(F_i)_{i \in I}$ sont supplémentaires orthogonaux si :

- ils sont supplémentaires dans E , c'est-à-dire $E = \bigoplus_{i \in I} F_i$.
- ils sont orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire $\forall (v_i, v_j) \in F_i \times F_j, (i \neq j) \implies \langle v_i, v_j \rangle = 0$.

On appelle alors projecteurs orthogonaux associés à ces supplémentaires orthogonaux la famille des projecteurs $(p_i)_{i \in I}$ sur les sous-espaces vectoriels F_i dans la direction de la somme directe orthogonale des autres.

Proposition 18 Pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie F , les sous-espaces F et F^\perp sont supplémentaires orthogonaux, et si (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de F , alors la projection orthogonale d'un vecteur x sur F (dans la direction F^\perp) est :

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle e_k.$$

Preuve. Si on le munit du produit scalaire induit par celui de E , F est un espace préhilbertien de dimension finie et on sait qu'il admet des bases orthonormales (e_1, \dots, e_n) . Pour montrer que $E = F \oplus F^\perp$, on raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse: Considérons un vecteur $x = y + z \in F + F^\perp$.

Comme $y \in F$, $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ et $z = x - y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \in F^\perp$. Alors pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\langle e_k, z \rangle = \langle e_k, x \rangle - \langle e_k, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \rangle = \langle e_k, x \rangle - y_k = 0.$$

La décomposition de x est donc unique (donc la somme $F + F^\perp$ est direct) et est donnée par la formule suivante :

$$x = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle e_k + \left(x - \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle e_k \right).$$

- Synthèse: Considérons un vecteur $x \in E$ et décomposons-le sous la forme $x = y + z$ avec

$$y = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle e_k \text{ et } z = x - \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle e_k.$$

$y \in F$ puisqu'il est combinaison linéaire de e_1, \dots, e_n . $z \in F^\perp$ puisqu'il est orthogonal à la base (e_1, \dots, e_n) . Ainsi, tout vecteur $x \in E$ appartient à $F \oplus F^\perp$.

Ainsi, $E = F \oplus F^\perp$. De plus, la formule obtenue montre que la projection orthogonale d'un vecteur x sur F est donnée par la formule:

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle e_k.$$

□

Proposition 19 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt) Pour toute suite libre $(v_0, v_1, \dots, v_n, \dots)$ de vecteurs de E , il existe une et une seule suite $(e_0, e_1, \dots, e_n, \dots)$ dite orthonormalisée de Gram-Schmidt telle que:

- la famille $(e_0, e_1, \dots, e_n, \dots)$ est orthonormale.
- $\forall k \geq 0, \text{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(v_0, v_1, \dots, v_k)$.
- $\forall k \geq 0, \langle e_k, v_k \rangle > 0$.

Preuve. Construisons la suite (e_0, e_1, \dots, e_n) par récurrence sur n .

Si $n = 0$, on prend pour e_0 le vecteur $\frac{v_0}{\|v_0\|}$.

Supposons $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ obtenus et considérons e_n vérifiant :

- $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n) = \text{Vect}(v_0, \dots, v_n)$,
- e_n est orthogonal à $\text{Vect}(e_0, \dots, e_{n-1}) = \text{Vect}(v_0, \dots, v_{n-1})$,
- e_n est unitaire.

Les deux premières conditions sont réalisées si et seulement si e_n dirige la droite de $\text{Vect}(v_0, \dots, v_n)$ qui est orthogonale à $\text{Vect}(e_0, \dots, e_{n-1}) = \text{Vect}(v_0, \dots, v_{n-1})$. Un vecteur directeur de celle-ci s'obtient en ôtant à v_n sa projection orthogonale sur $\text{Vect}(e_0, \dots, e_{n-1})$, égale à $p_{n-1}(v_n) = \langle e_0, v_n \rangle e_0 + \dots + \langle e_{n-1}, v_n \rangle e_{n-1}$. Les deux premières conditions sont donc réalisées si et seulement si

$$e_n = \mu(v_n - p_{n-1}(v_n)), \text{ avec } \mu \neq 0.$$

Ce vecteur e_n est unitaire si $|\mu| = \|v_n - p_{n-1}(v_n)\|^{-1}$. Remarquons que $\|v_n - p_{n-1}(v_n)\|$ est non nul car sinon $v_n \in \text{Vect}(e_0, \dots, e_{n-1}) = \text{Vect}(v_0, \dots, v_{n-1})$ et la famille (v_0, \dots, v_n, \dots) ne serait pas libre, contrairement à l'hypothèse.

Le scalaire μ est ainsi fixé à un facteur $e^{i\theta}$ près.

La dernière condition détermine alors μ car l'égalité $v_n = \mu^{-1}e_n + p_{n-1}(v_n)$ implique $\langle e_n, v_n \rangle = \langle e_n, \mu^{-1}e_n + p_{n-1}(v_n) \rangle = \mu^{-1}$, de sorte que $\langle e_n, v_n \rangle > 0$ si et seulement si $\mu^{-1} > 0$ c'est-à-dire $\mu > 0$.

Comme $|\mu| = \|v_n - p_{n-1}(v_n)\|^{-1}$, cette condition équivaut à $\mu = \|v_n - p_{n-1}(v_n)\|^{-1}$. Finalement, e_n vérifie l'ensemble des conditions de la proposition si et seulement si

$$e_n = \frac{v_n - p_{n-1}(v_n)}{\|v_n - p_{n-1}(v_n)\|} = \frac{v_n - \langle e_0, v_n \rangle e_0 - \dots - \langle e_{n-1}, v_n \rangle e_{n-1}}{\|v_n - \langle e_0, v_n \rangle e_0 - \dots - \langle e_{n-1}, v_n \rangle e_{n-1}\|}.$$

□

Proposition 20 On suppose que E est de dimension finie. Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $E = F \oplus F^\perp$ et $F = (F^\perp)^\perp$. En particulier, $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$.

Preuve. Comme E est de dimension finie, ses sous-espaces F le sont aussi. D'après la proposition 18, F et F^\perp sont supplémentaires orthogonaux, c'est-à-dire $E = F \oplus F^\perp$. On en déduit que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$.

On a comme d'habitude $F \subset (F^\perp)^\perp$ et ces sous-espaces sont égaux car ils ont même dimension puisqu'on a $\dim((F^\perp)^\perp) = \dim(E) - \dim(F^\perp) = \dim(F)$. □

2.4 Inégalité de Bessel, égalité de Parseval

Proposition 21 Pour tout sous-espace vectoriel F de dimension finie, la projection orthogonale $p_F(x)$ d'un vecteur x de F est l'unique vecteur réalisant la distance de x à F :

$$\|x - p_F(x)\| = \inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}.$$

De plus, si (e_0, e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de F , la distance de x à F est :

$$d(x, F) = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=0}^n |\langle e_k, x \rangle|^2}.$$

Preuve. Pour tout vecteur y appartenant à F , on a :

$$x - y = (x - p_F(x)) + (p_F(x) - y).$$

Comme $p_F(x)$ est la projection orthogonale de x sur F , on a $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$. Donc $p_F(x) - y \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$ et le théorème de Pythagore donne :

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2.$$

Donc $\|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$ avec égalité pour $\|p_F(x) - y\| = 0$, c'est-à-dire $y = p_F(x)$. On en déduit que

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}.$$

Comme (e_0, \dots, e_n) est une base orthonormale de F , on a $p_F(x) = \sum_{k=0}^n \langle e_k, x \rangle e_k$. Comme le théorème de Pythagore donne $\|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2$ et $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{k=0}^n |\langle e_k, x \rangle|^2$, on a :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=0}^n |\langle e_k, x \rangle|^2}.$$

□

Proposition 22 (Inégalité de Bessel) Pour toute famille orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , on a, pour tout $x \in E$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_k, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \quad (2)$$

et la distance de x au sous-espace $\text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

$$\sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_k, x \rangle|^2} \geq 0. \quad (3)$$

Preuve. La famille (e_0, \dots, e_n) est une base orthonormale de $F_n = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$. Comme $x_n = \sum_{k=0}^n \langle e_k, x \rangle e_k$ est la projection orthogonale de x sur F_n , on a :

$$\|x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x - x_n\|^2 \geq \|x_n\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^n \langle e_k, x \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^n |\langle e_k, x \rangle|^2.$$

Ainsi, la suite $n \rightarrow \sum_{k=0}^n |\langle e_k, x \rangle|^2$ est croissante et majorée, donc elle converge. On en déduit par passage à la limite l'inégalité de Bessel (2).

Notons d la distance de x au sous-espace $F = \text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Puisque $x_n = \sum_{k=0}^n \langle e_k, x \rangle e_k \in F$, on a $d \leq d(x, x_n)$ pour tout entier naturel n , et donc: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$d \leq \|x - x_n\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|x_n\|^2} = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=0}^n |\langle e_k, x \rangle|^2}.$$

Par passage à la limite, on a $d \leq \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_k, x \rangle|^2}$.

Inversement, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe $\tilde{x} \in F$ tel que $\|x - \tilde{x}\| < d + \epsilon$. Comme $\tilde{x} \in F$, il est combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs e_k et il existe donc un entier N tel que $\tilde{x} \in F_N = \text{Vect}(e_0, \dots, e_N)$, de sorte qu'on a :

$$\sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_k, x \rangle|^2} \leq \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=0}^N |\langle e_k, x \rangle|^2} \leq \|x - x_N\| \leq \|x - \tilde{x}\| \leq d + \epsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que $\sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_k, x \rangle|^2} \leq d$. On en déduit ainsi la formule (3). \square

Proposition 23 Pour toute famille orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , il y a équivalence au sens de la norme associée au produit scalaire entre :

1. le sous-espace $\text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans l'espace préhilbertien E .
2. pour tout vecteur x de E , la suite $n \rightarrow x_n = \sum_{k=0}^n \langle e_k, x \rangle e_k$ converge vers x .
3. pour tout vecteur x de E , on a l'égalité de Parseval (qui équivaut à la nullité de la distance de tout vecteur x au sous-espace $\text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$) :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_k, x \rangle|^2 = \|x\|^2$$

Preuve. La famille (e_0, \dots, e_n) est une base orthonormale de $F_n = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ donc $x_n = \sum_{k=0}^n \langle e_k, x \rangle e_k$ est la projection orthogonale de x sur F_n .

Montrons que 1. et 2. sont équivalents. Si $F = \text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans E , pour tout $x \in E$, $\epsilon > 0$, il existe $\tilde{x} \in F$ tel que $\|x - \tilde{x}\| \leq \epsilon$. Comme $\tilde{x} \in F$, il existe donc un entier N tel que $\tilde{x} \in F_N$ et comme $F_N \subset F_n$ pour tout $n \geq N$, on a $\|x - x_n\| = d(x, F_n) \leq d(x, F_N) \leq \|x - \tilde{x}\| \leq \epsilon$. Ainsi, la suite (x_n) converge vers x . Réciproquement, si pour tout $x \in E$, la suite (x_n) d'éléments de F converge vers x , alors par définition F est dense dans E .

Montrons que 2. et 3. sont équivalents. Comme x_n est la projection orthogonale de x sur F_n , $\|x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x - x_n\|^2 = \sum_{k=0}^n |\langle e_k, x \rangle|^2 + \|x - x_n\|^2$. Ainsi, pour tout $x \in E$,

$$\|x - x_n\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=0}^n |\langle e_k, x \rangle|^2}.$$

Donc (x_n) converge vers x si et seulement si $\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_k, x \rangle|^2 = \|x\|^2$. \square