Chapitre 3 : Les triangles

1 Quelques définitions

Définition 1 *Un triangle est un polygone ayant trois côtés, donc trois sommets et trois angles.*

Définition 2 *Un triangle ABC est dit :*
- ***Isocèle** en A si $AB = AC$.*
- ***Equilatéral** si $AB = AC = BC$.*
- ***Rectangle** en A si $\widehat{BAC}$ est un angle droit ; le côté $[BC]$ est l'hypoténuse de ce triangle.*
- ***Isocèle** et **rectangle** en A s'il est isocèle en A et rectangle en A.*

Proposition 3 *La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à $180°$ ou π radians.*

Proposition 4 *Un triangle ABC est isocèle en A si seulement si les angles des sommets B et C ont même mesure.*

Proposition 5 *Un triangle est équilatéral si et seulement si les trois angles ont même mesure, soit $60°$ ou $\frac{\pi}{3}$ radians.*

Proposition 6 *Dans un triangle rectangle, le cercle dont un diamètre est l'hypoténuse est **circonscrit** à ce triangle : il passe par les trois sommets de ce triangle.*

Proposition 7 *Dans un triangle ABC rectangle et isocèle en A, la mesure des angles de sommets B et C est égale à $45°$ ou $\frac{\pi}{4}$ radians.*

2 La droite des milieux, le théorème de Thalès : une première approche

2.1 Droites des milieux

C'est un cas particulier du théorème de Thalès.

Théorème 8 *La droite qui joint les milieux de deux des côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.*

Réciproquement, si une droite est parallèle à un côté d'un triangle et passe par le milieu d'un second côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

2.2 Le théorème de Thalès dans le triangle

Théorème 9 *Partie directe :*

Soit ABC un triangle, D un point de (AB) et E un point de (AC) ; si les droites (BC) et (DE) sont parallèles, alors, on a les égalités :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Réciproque :

Soit ABC un triangle, D un point de (AB) et E un point de (AC) tels que A, B, D et A, C, E soient dans le même ordre. Alors si $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, les droites (BC) et (DE) sont parallèles et de plus, on a $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$.

3 Droites remarquables dans un triangle

Définition 10
- *On appelle **médiatrices** d'un triangle les médiatrices de chacun des côtés.*
- *On appelle **hauteurs** d'un triangle les droites issues d'un sommet et perpendiculaires au côté opposé. L'**aire** d'un triangle est égale au produit des longueurs de la hauteur issue d'un sommet et du côté opposé.*
- *On appelle **bissectrice intérieures**, ou **bissectrices**, d'un triangle les bissectrices intérieures de chacun des trois angles de ce triangle. Les **bissectrices extérieures** de ces angles sont les bissectrices extérieures du triangle.*
- *On appelle **médiane** d'un triangle les droites reliant chaque sommet au milieu du côté opposé.*

Proposition 11
- *Les trois **médiatrices** d'un triangle sont concourantes en un point : le **centre du cercle circonscrit** à ce triangle.*
- *Trois points du plan **non alignés**, sont toujours sur un même cercle : ils sont dits **cocycliques**. Ceci généralise le cas du triangle rectangle : tout triangle admet un cercle circonscrit.*
- *Les trois **hauteurs** d'un triangle sont concourantes en un point, l'**orthocentre** de ce triangle.*
- *Les trois **bissectrices intérieures** d'un triangle sont concourantes en un point, le **centre du cercle inscrit** dans ce triangle : ce cercle est tangent intérieurement à chaque côté du triangle. Tout triangle admet donc un cercle inscrit.*
- *Les trois **médianes** d'un triangle sont concourantes en un point, le **centre de gravité** de ce triangle, soit encore l'**isobarycentre** de ses trois sommets. De plus on a les relations suivantes : Si ABC est un triangle, A', B' et C' sont les milieux respectifs des côtés $[BC], [AC]$ et $[AB]$ et G est le centre de gravité de ABC :*

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}, \quad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}, \quad \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}, \quad \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

Proposition 12
- *Dans un triangle isocèle en A, la hauteur, la médiane et la bissectrice intérieure issue de A coïncident avec la médiatrice du côté opposé.*
- *Dans un triangle équilatéral, les hauteurs sont également médianes, médiatrices et bissectrices intérieures.*
- *Si dans un triangle deux des quatre droites remarquables issues d'un même sommet coïncident, ce triangle est isocèle en ce sommet.*

4 Retour sur le triangle rectangle

Théorème 13 *(de Pythagore) Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2+AC^2 = BC^2$.*

Proposition 14 *Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si le cercle de diamètre $[BC]$ est circonscrit à ABC.*

Proposition 15 *Soit ABC un triangle rectangle en A, et H le projeté orthogonal de A sur (BC). Alors, on a les relations suivantes :*

$$AB^2 = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC}, \quad AC^2 = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CB} \quad HA^2 = -\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}.$$