Chapitre 5

Systèmes linéaires et calcul matriciel

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera soit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, soit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

5.1 Matrices et systèmes linéaires

5.1.1 Définitions et généralités

Définition 5.1.1 — *Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. On appelle* ***matrice à** n **lignes et** p **colonnes à éléments dans** $\mathbb{K}$ *tout tableau de np éléments de $\mathbb{K}$ rangés sur n lignes et p colonnes. Les éléments de $\mathbb{K}$ constituant la matrice sont appelés* ***coefficients*** *de la matrice.*

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Lorsque $n = p$, cet ensemble est plus simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et ses éléments sont alors appelés ***matrices carrées d'ordre** n.

Les matrices à n lignes et p colonnes sont encore dites ***matrices** $n \times p$ *et les entiers n et p sont les* ***dimensions de la matrice***

Pour signifier qu'un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ doit être considéré comme une matrice, on le note entre parenthèses. Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \, , \; B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \, , \; C = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 2 & -i \\ -i\sqrt{2} & i\sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$$

Si A est une matrice $n \times p$, on note a_{ij} ou A_{ij} le coefficient de A situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne et on écrit encore :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \text{ ou } A = (A_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

S'il n'y a pas d'ambiguité sur le nombres de lignes et le nombre de colonnes, on pourra noter plus simplement :

$$A = (a_{ij}) \text{ ou } A = (A_{ij})$$

Pour les matrices A, B, C définies ci-dessus, on a par exemple :

$$a_{12} = 0 \, , \; b_{22} = \pi \, , \; c_{32} = i\sqrt{3} \, , \text{etc} \ldots$$

Définition 5.1.2 — *Toute matrice $n \times 1$ est appelée* **matrice colonne** *et toute matrice $1 \times p$ est appelée* **matrice ligne**.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$. Alors :

- *Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, la matrice ligne $(a_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant p} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix}$ est appelée $i^{\text{ème}}$ ligne de A.*
- *Pour tout $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, la matrice colonne $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ est appelée $j^{\text{ème}}$ colonne de A.*

Définition 5.1.3 — *Si $A = (a_{ij})$ est une matrice carrée $n \times n$, les coefficients a_{ii}, c'est-à-dire $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ sont appelés* **coefficients diagonaux** *de A et l'ensemble $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ est appelée* **diagonale** *de A.*

Les coefficients a_{ij} tels que $i > j$ sont donc situés au-dessous de la diagonale de A tandis que les coefficients a_{ij} tels que $i < j$ sont situés au-dessus de cette diagonale.

Définition 5.1.4 — *La* **matrice nulle** *$A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, c'est-à-dire définie par :*

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, p\} \ , \ a_{ij} = 0$$

Cette matrice est habituellement notée $O_{n,p}$ ou O_n si $n = p$.

Définition 5.1.5 — *Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont dites* **égales** *si et seulement si elles ont mêmes dimensions n et p et :*

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, p\} \ , \ a_{ij} = b_{ij}$$

et **distinctes** *dans le cas contraire.*

EXEMPLE —

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^2 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 5.1.6 — *Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On appelle* **système linéaire de** *n* **équations à** *p* **inconnues** *$x_1, x_2, \dots, x_p$ dans $\mathbb{K}$ la donnée simultanée de n équations (e_1), (e_2), ..., (e_n) de la forme :*

$$(S) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 & (e_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & b_2 & (e_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n & (e_n) \end{cases}$$

où les coefficients a_{ij} et b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{K}$. En notant $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, $X = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ et $B = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on définit trois matrices A, X, B.

A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dite **matrice du système**, *X est une matrice colonne inconnue à p lignes et B une matrice colonne à n lignes appelée* **second membre du système**.

Si $B = O_{n,1}$, c'est-à-dire si tous les coefficients b_i sont nuls, on dit que (S) est un **système homogène** *et sinon le système (S_0) déduit de (S) en remplaçant B par la matrice colonne nulle est appelé* **système homogène associé à** *(S).*

Un élément $X = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est ***solution*** *de (S) si les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ satisfont à chacune des égalités figurant dans (S). Le système (S) est dit* ***possible*** *(ou* ***compatible****) s'il admet au moins une solution et* ***impossible*** *(ou* ***incompatible****) s'il n'admet pas de solutions.*

Lorsque (S) est un système homogène, la solution évidente $X = 0$ est appelée ***solution triviale*** *de (S).*

REMARQUE — Nous verrons plus loin après avoir étudié le produit de matrices que l'on peut écrire le système (S) sous forme d'égalité matricielle :

$$AX = B$$

où AX représente le produit des matrices A et X.

Définition 5.1.7 — *On appelle système de* **Cramer** *tout système linéaire qui admet une unique solution.*

Définition 5.1.8 — *Soit (S) et (S') deux systèmes linéaires à p inconnues dans $\mathbb{K}$, mais n'ayant pas nécessairement le même nombre d'équations. (S) et (S') sont dits* ***équivalents*** *s'ils admettent le même ensemble de solutions, c'est-à-dire si :*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \quad , \quad (X \;\; \textit{est solution de} \;\; (S) \Longleftrightarrow X \;\; \textit{est solution de} \;\; (S'))$$

La résolution d'un système linéaire (S) va consister à remplacer (S) par un système (S') équivalent et plus facile à résoudre. A cette fin nous introduirons les systèmes échelonnés.

Proposition 5.1.1 — *Soit (S) un système linéaire de n équations (e_1), (e_2), ..., (e_n) aux p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ dans $\mathbb{K}$. Alors on obtient un système (S') équivalent à (S) en effectuant l'une ou l'autre des opérations suivantes, dites opérations élémentaires :*

1 - Supprimer une équation nulle, c'est-à-dire de la forme $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_p = 0$.

2 - Changer l'ordre des équations.

3 - Multiplier l'une des équations (e_i) par un scalaire α non nul.

4 - Remplacer l'une des équations (e_i) par l'équation $(e_i) + \lambda(e_k)$ pour $k \neq i$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

PREUVE — Dans les cas 1, 2 et 3, il est évident que les systèmes (S) et (S') sont équivalents.

Considérons le cas 4. Si X est solution de (S), X est solution de toutes les équations (e_1), (e_2), ..., (e_n) et donc solution des équations (e_1), ..., (e_{i-1}), $(e_i) + \lambda(e_k)$, (e_{i+1}), ..., (e_n), c'est-à-dire de (S').

Réciproquement, si X est solution de (S'), X est solution des équations (e_1), ..., (e_{i-1}), $(e_i) + \lambda(e_k)$, (e_{i+1}), ..., (e_n), donc de toutes les équations de (S), sauf peut-être (e_i), mais y compris (e_k). C'est donc aussi une solution de l'équation $[(e_i) + \lambda(e_k)] - \lambda(e_k) = (e_i)$ et par suite une solution de (S).

REMARQUE — En composant les opérations 3 et 4, on peut remplacer l'une des équations (e_i) par l'équation $\alpha(e_i) + \lambda(e_k)$ pour $\alpha \neq 0$ et $k \neq i$.

5.1.2 Systèmes échelonnés

Nous allons d'abord traiter quatre exemples illustrant les différentes situations que l'on peut rencontrer et montrer de façon pratique comment procéder pour obtenir un système équivalent echelonné. Supposons le système linéaire (S) donné par

$$(S) \qquad\qquad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad , \quad \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = b_i$$

A la matrice du système $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on associe une matrice dite ***matrice complète*** du système et construite à partir de A en lui adjoignant une $n+1$-ème colonne constituée du second membre de (S). Ainsi cette matrice complète s'écrit :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} & b_p \end{array}\right)$$

Au lieu d'effectuer les transformations élémentaires sur le système lui-même, on peut se contenter de les effectuer sur sa matrice complète et à la fin, on réécrira le système échelonné pour déterminer explicitement la solution ou constater qu'il est impossible.

On pourra aussi adopter les notations suivantes pour représenter à chaque étape de l'algorithme les transformations élémentaires ; si L_i représente la i-ème ligne de la matrice complète du système :

$L_i \leftrightarrow L_j$	signifie :	on échange L_i et L_j
$L_i \leftarrow \alpha L_i$	signifie :	on multiplie L_i par α ce qui donne la nouvelle ligne L_i
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	signifie :	on ajoute λL_j à L_i ce qui donne la nouvelle ligne L_i

Exemple 1

Soit le système $(S_1)\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y+z-t=4 \\ x+y-z+t=-4 \\ x-y+z+t=2 \end{cases}$

Par transformations élémentaires successives, on peut écrire :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftrightarrow L_4 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

On en déduit que le système (S_1) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ \quad - 2y = 2 \\ \quad\quad - 2z = -4 \\ \quad\quad\quad - 2t = 4 \end{cases}$$

C'est un système de Cramer qui admet l'unique solution $(x,y,z,t) = (1,-1,2,-2)$.

Exemple 2

Soit le système $(S_2)\begin{cases} 2x+y-z+2t+2u=1 \\ 4x-y+z-t+4u=-7 \\ 4x-2y+z+5t-u=3 \end{cases}$

Par transformations élémentaires successives, on peut écrire :

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 4 & -7 \\ 4 & -2 & 1 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -5 & 0 & -9 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_2 \quad \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -5 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & 23 & -15 & 39 \end{array}\right)$$

On en déduit que le système (S_2) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2t + 2u = 1 \\ \quad - 3y + 3z - 5t = -9 \\ \quad - 3z + 23t - 15u = 39 \end{cases}$$

Si l'on fixe t et u, on voit que ce système est de Cramer pour les inconnues x, y, z. On convient alors d'appeler x, y, z ***inconnues principales*** que l'on exprime en fonction des inconnues t et u appelées ***inconnues secondaires*** et on dit que le système admet une ***indétermination*** d'ordre 2. Les solutions sont données par

$$x = -\frac{t}{6} - u - 1 \ , \ y = 6t - 5u - 10 \ , \ z = \frac{23t}{3} - 5u - 13$$

On peut aussi écrire ces solutions sous la forme :

$$(x, y, z, t, u) = \left(-\frac{t}{6} - u - 1, 6t - 5u - 10, \frac{23t}{3} - 5u - 13, t, u\right) \quad , \quad (t, u) \in \mathbb{R}^2$$

Le choix des inconnues secondaires n'est pas unique. Dans cet exemple, n'importe quel couple d'inconnues pourrait être choisi pour inconnues secondaires : il suffirait d'échanger l'ordre des inconnues pour s'en convaincre.

Exemple 3

Soit le système $(S_3) \begin{cases} x + 2y - z + 2t + u = 1 \\ x + 2y + z + 6t + 3u = -1 \\ 2x + 4y + 9t + 8u = 0 \end{cases}$

Par transformations élémentaires successives, on peut écrire :

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 6 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 9 & 8 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 6 & -2 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit que le système (S_3) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2t + u = 1 \\ \quad 2z + 4t + 2u = -2 \\ \quad t + 4u = 0 \end{cases}$$

Si l'on fixe u et y, on voit que ce système est de Cramer pour les inconnues x, z, t. On choisit donc x, z, t pour inconnues principales, le système est indéterminé d'ordre 2 et les solutions sont données par :

$$(x, y, z, t, u) = (-2y + 14u, y, 7u - 1, -4u, u) \quad , \quad (y, u) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple 4

Soit le système $(S_4)\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 4x - 3y - z = 3 \\ 2x + 4y + 2z = 4 \end{cases}$

Par transformations élémentaires successives, on peut écrire :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -8 & -5 \\ 0 & -11 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow 5L_3 - 11L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 43 & 30 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_4 \leftarrow 43L_4 + 2L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 43 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \end{array}\right)$$

On en déduit que le système (S_3) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ \quad - 5y - 8z = -5 \\ \quad\quad 43z = 30 \\ \quad\quad 0z = 60 \end{cases}$$

A cause de la dernière équation, ce système est impossible.

A la suite de ces exemples, nous pouvons maintenant définir de manière précise ce qu'est un système échelonné, et ensuite exposer la méthode du pivot de Gauss permettant de résoudre les systèmes linéaires. Ces deux paragraphes ne présentent qu'un intérêt théorique justifiant la démarche exposée dans les exemples et ne sont à aborder qu'en dernière lecture du chapitre.

Définition 5.1.9 — *Un système linéaire (S) de n équations à p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dans $\mathbb{K}$ est dit* ***échelonné*** *si $2 \leqslant n \leqslant p$ et s'il a la forme suivante :*

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \quad a_{12}x_2 + \quad \ldots \quad \ldots \quad + a_{1p}x_p = b_1 \\ \quad\quad a_{2j_2}x_{j_2} + \quad \ldots \quad \ldots \quad + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad\quad\quad \ddots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \quad\quad\quad\quad a_{nj_n}x_{j_n} + \quad \ldots \quad + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

avec

$$1 < j_2 < \cdots < j_n \leqslant p \quad , \quad a_{11} \neq 0, a_{2j_2} \neq 0, \ldots, a_{nj_n} \neq 0$$

Les inconnues $x_1, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n}$ figurant en tête de chaque équations'appellent les ***inconnues principales*** *de (S) et si $n < p$, les autres inconnues s'appellent les* ***inconnues secondaires****.*

Proposition 5.1.2 — *Lorsque $n = p$ et $j_2 = 2, j_3 = 3, \dots, j_n = n$, c'est-à-dire lorsque (S) a la forme suivante :*

$$(S) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & \dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & a_{22}x_2 + & \dots & \dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{kk}x_k + & \dots & +a_{kn}x_n & = & b_k \\ & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

où les coefficients a_{ii} sont tous non nuls, le système (S) est un système de Cramer.

Preuve — Puisque a_{nn} est non nul, x_n est uniquement déterminé par la n-ième équation. Ensuite, puisque $a_{n-1,n-1}$ est non nul, la $n-1$-ième équation détermine de manière unique x_{n-1} et ainsi de proche en proche, on détermine de manière unique $x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$, ce qui montre que (S) admet une unique solution et est donc un système de Cramer.

Proposition 5.1.3 — *Soit n et p des entiers tels que $2 \leqslant n < p$ et (S) le système échelonné suivant :*

$$(S) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & \dots & +a_{1p}x_p & = & b_1 \\ & a_{2j_2}x_{j_2} + & \dots & \dots & +a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{nj_n}x_{j_n} + & \dots & +a_{np}x_p & = & b_n \end{cases}$$

Si on donne aux $p - n$ inconnues secondaires des valeurs arbitraires dans $\mathbb{K}$, les n inconnues principales $x_1, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}$ sont déterminées de manière unique par un système échelonné de Cramer de n équations à n inconnues. (S) admet donc des solutions dépendant linéairement des $p - n$ inconnues secondaires.

Preuve — Evidente

On dit dans ce cas que (S) est ***indéterminé*** et plus précisément qu'il admet une ***indétermination d'ordre*** $p - n$.

5.1.3 Méthode du pivot de Gauss

Le principe consiste à transformer en un nombre fini d'étapes, le système initial en un système équivalent qui sera soit impossible, soit échelonné. Considérons donc le système suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p & = & b_1 & \qquad (e_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p & = & b_2 & \qquad (e_2) \\ \vdots & & \vdots & \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p & = & b_n & \qquad (e_n) \end{cases}$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

• $n \geqslant 2$: en effet le cas $n = 1$ (une seule équation) se résoud sans difficulté.

• Aucune équation de (S) n'est nulle. En effet, on se ramène à un système équivalent en supprimant toutes les équations nulles.

• Aucune équation de (S) n'est impossible. Sinon la résolution de (S) est terminée : (S) est impossible.

• On suppose que toutes les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ apparaissent dans le système, ce qui implique que pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ les coefficients a_{ij} , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ne sont pas tous nuls.

Ainsi, quitte à changer l'ordre des équations de (S) (ce qui donne un système équivalent), on peut supposer $a_{11} \neq 0$. Le coefficient a_{11} s'appelle le ***premier pivot*** de l'algorithme de Gauss. Alors en remplaçant pour tout $i \in \{2, \dots, p\}$ l'équation (e_i) par l'équation $a_{11}(e_i) - a_{i1}(e_1)$ on obtient un système équivalent dans lequel les $n-1$ dernières équations ne contiennent plus l'inconnue x_1. Ce système s'écrit :

$$(S_1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 & & (e_1) \\ & a'_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + a'_{2p}x_p & = & b'_2 & & (e'_2) \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & a'_{nj_2}x_{j_2} + \cdots + a'_{np}x_p & = & b'_n & & (e'_n) \end{cases}$$

où les coefficients a'_{kj_2} , $k \in \{2, 3, \dots n\}$ sont non tous nuls.

Notons (S'_1) le système linéaire des $n-1$ équations $(e'_2), \dots, (e'_n)$ aux inconnues $x_{j_2}, \dots, x_p$. Différents cas peuvent se présenter :

1 - (S'_1) est impossible. Alors (S') et par suite (S) est impossible.

2 - (S'_1) contient une ou plusieurs équations nulles : il suffit de les supprimer.

3 - Après suppression éventuelle des équations nulles, (S'_1) ne contient pas d'équation impossible. On applique alors à (S'_1) le même traitement que celui que l'on a fait subir à (S).

Il est clair qu'en un nombre fini d'étapes, on obtiendra un système (S') équivalent à (S) qui sera soit impossible soit échelonné avec un certain nombre r d'inconnues principales $x_1, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ avec $1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant p$. On démontre que cet entier r ne dépend pas du choix des pivots à chaque étape, mais ne dépend que de (S). r est appelé ***rang*** du système (S). On voit alors que si (S) est possible et de rang r, deux cas se présentent :

a) $r = p$: alors $j_2 = 2, j_3 = 3, \dots, j_p = p$, (S') est un système échelonné de Cramer et (S) admet donc une solution unique.

b) $1 \leqslant r < p$: (S') et donc (S) possède des solutions dépendant de $p - r$ inconnues secondaires ; c'est un système indéterminé.

On en déduit les résultats suivants :

Proposition 5.1.4 — *1 - Tout système linéaire est équivalent soit à un système impossible, soit à un système échelonné.*

2 - Un système ayant moins d'équations que d'inconnues est soit impossible, soit indéterminé.

3 - Un système homogène ayant moins d'équations que d'inconnues possède des solutions non triviales.

5.1.4 Exemples avec paramètres

Avec les notations du début de ce paragraphe, considérons les deux exemples suivants.

Exemple 1

Résoudre le système (S) suivant dépendant du paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x & - & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4t & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11t & = & a \end{cases}$$

Par transformations élémentaires successives, on a :

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 1 & 7 & -4 & 11 & a\end{array}\right) \quad \begin{array}{l}L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1\\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1\end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c}2 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 5 & -3 & 7 & 3\\ 0 & 15 & -9 & 21 & 2a-1\end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c}2 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 5 & -3 & 7 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a-10\end{array}\right)$$

D'où les résultats :

1° Si $a \neq 5$, (S) est impossible.

2° Si $a = 5$, (S) est équivalent au système échelonné (S') suivant :

$$(S') \qquad \begin{cases} 2x - y + z + t = 1\\ \qquad 5y - 3z + 7t = 3\end{cases}$$

Ce système est de rang 2 et en prenant pour inconnues principales x et y, on obtient :

$$y = \frac{1}{5}(3z - 7t + 3) \ , \ x = \frac{1}{5}(4 - z - 6t)$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\Sigma(S) = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = \frac{1}{5}(4 - z - 6t) \ , \ y = \frac{1}{5}(3z - 7t + 3)\right\}$$

Elle dépend des deux paramètres z et t.

Exemple 2

Pour (a, b) donné dans $\mathbb{R}^2$ et $n \geqslant 2$, résoudre sur $\mathbb{R}$ le système (S) suivant :

$$x_1 = ax_n + b \ , \ x_2 = ax_1 + b \ , \ x_3 = ax_2 + b \ , \ \dots \ , \ x_n = ax_{n-1} + b$$

En gardant la numérotation des inconnues, la matrice totale de ce système s'écrit :

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a & b\\ -a & 1 & 0 & & & & 0 & b\\ 0 & -a & 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & & & 0 & -a & 1 & 0 & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -a & 1 & b\end{array}\right)$$

En effectuant successivement les transformations :

$$L_2 \longleftarrow L_2 + aL_1 \ , \ L_3 \longleftarrow L_3 + aL_2 \ , \dots \ , L_n \longleftarrow L_n + aL_{n-1}$$

on obtient la matrice suivante d'un système équivalent :

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a & b\\ 0 & 1 & 0 & & & & -a^2 & b(1+a)\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & & -a^3 & b(1+a+a^2)\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & & & 0 & 0 & 1 & -a^{n-1} & b(1+a+\cdots a^{n-2})\\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1-a^n & b(1+a+\cdots a^{n-1})\end{array}\right)$$

Considérons alors les différents cas suivants :

1° $a \notin \{-1, +1\}$. Le système est de Cramer, il admet une solution unique. Puisque $1 - a^n \neq 0$ et $1 + a + \cdots a^{n-1} = \dfrac{1-a^n}{1-a}$, on obtient $x_n = \dfrac{b}{1-a}$, puis

$$x_{n-1} = b(1 + a + \cdots a^{n-2}) + a^{n-1}\frac{b}{1-a} = b\frac{1-a^{n-1}}{1-a} + b\frac{a^{n-1}}{1-a} = \frac{b}{1-a}$$

et par récurrence, on voit facilement que tous les x_i sont égaux à $\dfrac{b}{1-a}$. Ainsi (S) admet l'unique solution donnée par

$$\forall\, i \in \mathbb{N}_n \ \ , \ \ x_i = \frac{b}{1-a}$$

2° $a = +1$, $b \neq 0$. Le système est incompatible car la dernière équation est impossible.

3° $a = +1$, $b = 0$. Dans ce cas, la dernière équation est l'équation nulle que l'on peut supprimer et (S) est équivalent au système suivant de rang $n-1$:

$$\begin{cases} x_1 - x_n = 0 \\ x_2 - x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ x_{n-1} - x_n = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

L'ensemble des solutions de (S) est alors donné par :

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda(1, 1, \ldots, 1) \ , \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

4° $a = -1$. Dans le cas où n est impair, $1 - (-1)^n \neq 0$ et le système est de Cramer, on retrouve la solution unique de **1°** , soit $x_i = \dfrac{b}{2}$ pour tout $i \in \mathbb{N}_n$.

Dans le cas où n est pair, $1 - (-1)^n = 0$ et la matrice du système est donnée par :

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & b \\
0 & 1 & 0 & & & & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \ddots & & & 1 & b \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\
\vdots & & & 0 & 0 & 1 & 1 & b \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Le système est de rang $n-1$ et en prenant $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ pour inconnues principales, x_n pour inconnue secondaire, on a de manière évidente :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}_n \ , \ x_i = \begin{cases} x_n & \text{si} \quad i \text{ est pair} \\ b - x_n & \text{si} \quad i \text{ est impair} \end{cases}$$

5.2 Matrices carrées particulières

Définition 5.2.1 — *Une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite* **diagonale** *si pour tous indices distincts i et j, $a_{ij} = 0$.*

Une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux est dite **matrice scalaire**

Dans une matrice diagonale, seuls sont éventuellement non nuls les coefficients diagonaux de A.
EXEMPLE — Les matrices D_1 et D_2 suivantes sont diagonales. La matrice D_3 est scalaire :

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ , \ D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition 5.2.2 — *La* **matrice identité d'ordre** n *est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à* 1. *Cette matrice est notée* I_n.

Les coefficients a_{ij} de la matrice I_n peuvent être notés : $a_{ij} = \delta_{ij}$ où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

EXEMPLE —

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 5.2.3 — *Une matrice* $A = (a_{ij})$ *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est dite* **triangulaire supérieure** *si pour tous indices* i *et* j *tels que* $i > j$, $a_{ij} = 0$, *c'est-à-dire si tous les coefficients situés au-dessous de la diagonale sont nuls.*

Une matrice $A = (a_{ij})$ *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est dite* **triangulaire inférieure** *si pour tous indices* i *et* j *tels que* $i < j$, $a_{ij} = 0$, *c'est-à-dire si tous les coefficients situés au-dessus de la diagonale sont nuls.*

EXEMPLE — Les matrices A et B suivantes sont respectivement triangulaire inférieure et triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.3 Opérations sur les matrices

5.3.1 Addition des matrices

Définition 5.3.1 — *Si* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *sont deux matrices de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *donc de même dimensions, la matrice* $C = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *définie par :*

$$\forall (i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, p\} \ , \ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

est appelée **somme** *des matrices* A *et* B *et on note* $C = A + B$. *L'opération définissant la somme de deux matrices de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est appelée* **addition** *des matrices dans* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

REMARQUE — Le même symbole "+" est utilisé pour représenter l'addition dans $\mathbb{K}$ et l'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. En toute rigueur, on devrait utiliser deux symboles différents, mais en général, il n'y a pas de confusion possible.

EXEMPLE —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{1}{3} \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & \dfrac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 5.3.1 — *L'addition des matrices dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ possède les mêmes propriétés que l'addition dans $\mathbb{K}$, à savoir :*

- *L'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est interne, c'est-à-dire :*

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2 \ , \ A+B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

- *L'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est associative, c'est-à-dire :*

$$\forall (A,B,C) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^3 \ , \ (A+B)+C = A+(B+C)$$

Ainsi la somme de trois matrices A, B, C pourra être notée $A+B+C$ sans parenthèses.

- *L'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est commutative, c'est-à-dire :*

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2 \ , \ A+B = B+A$$

- *L'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet pour élément neutre la matrice nulle notée $O_{n,p}$, c'est-à-dire :*

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \ , \ A + O_{n,p} = O_{n,p} + A = A$$

PREUVE — Ces propriétés découlent directement des propriétés de l'addition dans $\mathbb{K}$ et des définitions de l'égalité et de l'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. □

REMARQUE — Par abus de notation, la matrice nulle $O_{n,p}$ pourra être simplement notée 0 s'il n'y a pas de confusion possible.

Définition 5.3.2 — ***L'opposée*** *de la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est la matrice $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ définie par :*

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\} \times \{1,2,\ldots,p\} \ , \ b_{ij} = -a_{ij}$$

On la note $B = -A$

Une conséquence directe de cette définition est la proposition suivante :

Proposition 5.3.2 — *Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:*

$$A + (-A) = (-A) + A = O_{n,p}$$

5.3.2 Produit par un scalaire

Définition 5.3.3 — *Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$, la matrice $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ définie par :*

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\} \times \{1,2,\ldots,p\} \ , \ b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

est appelée **produit de la matrice** A **par le scalaire** λ *et on note $B = \lambda A$.*

EXEMPLE —

$$3 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -3 & 3 \\ 9 & \sqrt{5} & 0 \\ 1 & \pi & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 9 \\ 27 & 3\sqrt{5} & 0 \\ 3 & 3\pi & 12 \end{pmatrix}$$

Proposition 5.3.3 — *Le produit des matrices par un scalaire possède les propriétés suivantes :*

- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \ , \ \forall (A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2 \ , \ \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \ , \ \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \ , \ (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \ , \ \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \ , \ \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\ ,\ 1\,A = A$

PREUVE — Pour toutes matrices $A = (a_{ij}), B = b_{ij}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(E)$, tous scalaires λ, μ dans E et tout (i,j) dans $\{1,2,\ldots,n\} \times \{1,2,\ldots,p\}$:

- $[\lambda(A+B)]_{ij} = \lambda[A+B]_{ij} = \lambda(a_{ij}+b_{ij}) = \lambda a_{ij} + \lambda b_{ij} = [\lambda A]_{ij} + [\lambda B]_{ij} = [\lambda A + \lambda B]_{ij}$
  D'où : $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- $[(\lambda+\mu)A]_{ij} = (\lambda+\mu)a_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu a_{ij} = [\lambda A]_{ij} + [\mu A]_{ij} = [\lambda A + \mu A]_{ij}$
  D'où : $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
- $[\lambda(\mu A)]_{ij} = \lambda[\mu A]_{ij} = \lambda(\mu a_{ij}) = (\lambda\mu)a_{ij} = [(\lambda\mu)A]_{ij}$
  D'où : $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- $[1\,A]_{ij} = 1\,a_{ij} = a_{ij} = [A]_{ij}$
  D'où : $1\,A = A$

□

REMARQUE — La matrice opposée de A vérifie : $-A = (-1)A$

5.3.3 Produit de deux matrices

Définition 5.3.4 — *Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, la matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}$, élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, définie par :*

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\} \times \{1,2,\ldots,q\}\ ,\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

*est appelée **produit** des matrices A et B et on note $C = AB$. L'opération définissant le produit d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est appelée **multiplication ou produit** des matrices.*

On peut interpréter ce produit comme suit : le terme de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de $C = AB$ s'obtient en sommant les produits des termes de même rang dans la i-ème ligne de A et dans la j-ème colonne de B selon le schéma ci-dessous où l'on a représenté en gras les coefficients de A et B utiles au calcul de c_{ij} :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \ldots & \mathbf{a_{ik}} & \ldots & \mathbf{a_{ip}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & \mathbf{b_{1j}} & \ldots & b_{1q} \\ b_{21} & \ldots & \mathbf{b_{2j}} & \ldots & b_{2q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \ldots & \mathbf{b_{kj}} & \ldots & b_{kq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \ldots & \mathbf{b_{pj}} & \ldots & b_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1j} & \ldots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \ldots & \mathbf{c_{ij}} & \ldots & c_{iq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nj} & \ldots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

REMARQUE — Pour pouvoir effectuer le produit de A par B, il faut impérativement que le nombres de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

EXEMPLE — Soit à calculer AB si :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -3 & 3 \\ 9 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après la définition, AB est une matrice à deux lignes (le nombre de lignes de la matrice de gauche) et trois colonnes (le nombre de colonnes de la matrice de droite). Pour calculer par exemple le coefficient de la première ligne et deuxième colonne de AB, on multiplie terme à terme les éléments de la première ligne de A par ceux de la deuxième colonne de B et on additionne. Ainsi :

$$[AB]_{12} = \frac{2}{3} \times (-1) + (-3) \times 0 + 3 \times 2 = \frac{16}{3}$$

En procédant de même pour tous les éléments de AB, on obtient :

$$AB = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -3 & 3 \\ 9 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & \frac{16}{3} & -3\sqrt{2} + \frac{11}{3} \\ 2\sqrt{5} & -9 & \sqrt{10} + 9 \end{pmatrix}$$

REMARQUE — On ne peut pas calculer BA, puisque B possède trois colonnes et A deux lignes.

Proposition 5.3.4 — *La multiplication des matrices possède les propriétés suivantes :*

- *La multiplication des matrices est associative, c'est-à-dire :*

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) \ , \ (AB)C = A(BC)$$

Ainsi le produit de trois matrices A, B, C pourra être noté ABC sans parenthèses.

- *La multiplication des matrices est distributive par rapport à l'addition, c'est-à-dire :*

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \ , \ A(B + C) = AB + AC$$

et

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \ , \ (A + B)C = AC + BC$$

PREUVE — Notons $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$, $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant r}}$.

- Remarquons d'abord que AB est dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, BC dans $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, donc $(AB)C$ et $A(BC)$ sont toutes deux dans $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$. Et pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, r\}$:

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{k=1}^{q} [AB]_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{l=1}^{p} a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{l=1}^{p} a_{il} b_{lk} c_{kj} \right)$$

et

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{l=1}^{p} a_{il} [BC]_{lj} = \sum_{l=1}^{p} a_{il} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{lk} c_{kj} \right) = \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{q} a_{il} b_{lk} c_{kj} \right)$$

Comme l'addition est commutative dans $\mathbb{K}$, ces deux sommes sont égales. Par conséquent :

$$(AB)C = A(BC)$$

- Considérons le premier cas. $B + C$ est dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, AB, AC et $A(B + C)$ sont dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, donc $A(B + C)$ et $AB + AC$ sont toutes deux dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$. Et pour tout (i, j) dans $\{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, q\}$:

$$\begin{aligned} [A(B + C)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} [B + C]_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik} c_{kj} \\ &= [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB + AC]_{ij} \end{aligned}$$

Il en résulte $A(B + C) = AB + AC$ et on montrerait de même $(A + B)C = AC + BC$.

□

Proposition 5.3.5 — *Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a :*

$$I_n A = A \ \textit{ et } \ AI_p = A$$

PREUVE — On sait que les matrices identité I_n et I_p sont données par :

$$I_n = (\delta_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \ \text{ et } \ I_p = (\delta_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

D'où :

$$[I_nA]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}a_{kj} = a_{ij} \ \text{ et } \ [AI_p]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}$$

En effet ces deux sommes contiennent chacune un seul terme non nul : pour la première, c'est le terme correspondant à $k = i$ et ce terme vaut a_{ij} tandis que pour la seconde, c'est celui correspondant à $k = j$ et ce terme vaut aussi a_{ij}. On a donc bien $I_nA = A$ et $AI_p = A$. □

REMARQUE — Contrairement à ce qui se passe pour la multiplication dans $\mathbb{R}$, on peut avoir $AB = O_{n,q}$ avec $A \neq O_{n,p}$ et $B \neq O_{p,q}$. Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.3.4 La multiplication des matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Si on considère deux matrices carrées A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut toujours calculer les produits AB et BA et on obtient dans les deux cas une matrice carrée d'ordre n. On peut donc dire que la multiplication des matrices est interne dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, mais elle n'est pas commutative, car les produits AB et BA sont en général différents.

EXEMPLE — Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Une conséquence de la propriété que la multiplication des matrices est interne dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est que l'on peut définir la puissance d'une matrice carrée.

Définition 5.3.5 — *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle* **puissance k^{ième}** *de A la matrice notée A^k, définie par :*

- *Si $k = 0$, $A^0 = I_n$*
- *Si $k = 1$, $A^1 = A$*
- *Si $k > 1$, $A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$*

REMARQUE — On peut avoir $A^k = O_n$ avec $A \neq O_n$. Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.4 Matrices inversibles

Définition 5.4.1 — *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite* **inversible** *si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :*

$$AB = BA = I_n$$

REMARQUES — 1 - Il découle de cette définition que si A est inversible, la matrice B est aussi inversible.

2 - Si A est inversible, cela signifie que l'on peut simplifier les égalités qui contiennent A en facteur (en distinguant facteur à droite et facteur à gauche puisque le produit n'est pas commutatif). Si par exemple, $AB = BA = I_n$:

$$AC = AD \Longrightarrow B(AC) = B(AD) \Longleftrightarrow \underbrace{(BA)}_{I_n}C = \underbrace{(BA)}_{I_n}D \Longrightarrow C = D$$

Et de même, $CA = DA \Longrightarrow C = D$.

Proposition 5.4.1 — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible, il existe une unique matrice B telle que $AB = BA = I_n$. Cette matrice est appelée* **inverse** *de A et notée A^{-1}.*

PREUVE — Supposons qu'il existe deux matrices B et C telles que $AB = BA = I_n$ et $AC = CA = I_n$. Alors :

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

D'où le résultat. En notant $B = A^{-1}$, on a donc :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

□

REMARQUE — Dans un cours d'algèbre plus avancé, il sera démontré que l'une des égalités $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ implique l'autre. Nous admettrons pour l'instant ce résultat et par conséquent pour prouver l'inversibilité de A, il suffira d'exhiber une matrice B vérifiant une seule des égalités $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ et on aura alors nécessairement $B = A^{-1}$.

Calcul pratique de A^{-1} par résolution d'un système linéaire

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible et $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. En posant $Y = AX$, Y est aussi dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on a :

$$Y = AX \Longrightarrow A^{-1}Y = A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = I_nX = X$$

et

$$X = A^{-1}Y \Longrightarrow AX = A(A^{-1}Y) = (AA^{-1})Y = I_nY = Y$$

Soit

$$AX = Y \Longleftrightarrow X = A^{-1}Y$$

En notant b_{ij} les éléments de A^{-1} et $Y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, il vient :

$$\begin{aligned}
AX = Y \iff & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases} \\
\iff & A^{-1}Y = X \iff \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & & & b_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1n}y_n \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2n}y_n \\ \vdots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \dots + b_{nn}y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1n}y_n = x_1 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2n}y_n = x_2 \\ \vdots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \dots + b_{nn}y_n = x_n \end{cases}
\end{aligned}$$

L'équation matricielle $AX = Y$ représente un système linéaire de n équations aux n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$. Si la résolution de ce système est possible, par la méthode du pivot de Gauss par exemple, et permet d'exprimer de manière unique les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ en fonction de $y_1, y_2, \dots, y_n$, alors A est inversible et l'écriture du système $X = A^{-1}Y$ fournit les coefficients b_{ij} de la matrice A^{-1}. Si le système n'est pas de Cramer, A n'est pas inversible.

5.4.1 Exemples de calcul d'inverse d'une matrice

Exemple 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
AX = Y \iff & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= y_1 \\ x_1 + 2x_2 &= y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= y_1 \\ \dfrac{1}{2}x_2 &= y_2 - \dfrac{1}{2}y_1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$:

$$AX = Y \iff \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= y_1 \\ -x_1 - 2x_2 &= y_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= y_1 \\ 2x_2 + 3x_3 &= y_1 + y_2 \\ -6x_2 - 3x_3 &= -2y_1 + y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= y_1 \\ 2x_2 + 3x_3 &= y_1 + y_2 \\ 6x_3 &= y_1 + 3y_2 + y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 - \frac{1}{4}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{6}y_3 \end{cases}$$

D'où :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

5.5 Propriétés de l'inverse

Proposition 5.5.1 — *Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Si A et B sont inversibles, AB l'est aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

PREUVE — Puisque A et B sont inversibles, on peut considérer la matrice $B^{-1}A^{-1}$. Cette matrice vérifie :

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

Donc AB est inversible et par unicité de l'inverse $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

Corollaire 5.5.1 — *Soit k entier supérieur ou égal à 2 et $(A_1, A_2, \ldots, A_k) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^k$. Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont inversibles, $A_1A_2 \cdots A_k$ l'est aussi et $(A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}$.*

PREUVE — Soit k entier supérieur ou égal à 2 et $A_1, A_2, \ldots, A_k$ des matrices inversibles d'ordre n. Montrons le résultat par récurrence sur k. Soit P_k l'assertion :

$$A_1A_2 \cdots A_k \text{ est inversible et } (A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}$$

D'après la proposition précédente, P_2 est vraie. Soit k un entier supérieur ou égal à 2 pour lequel P_k est vraie et soit A_{k+1} une matrice inversible d'ordre n. Alors :

$$A_1A_2 \cdots A_kA_{k+1} = (A_1A_2 \cdots A_k)A_{k+1}$$

Comme $A_1A_2 \cdots A_k$ et A_{k+1} sont inversibles, il en est de même de $(A_1A_2 \cdots A_k)A_{k+1}$ et donc de $A_1A_2 \cdots A_kA_{k+1}$ et en outre :

$$\begin{aligned} (A_1A_2 \cdots A_kA_{k+1})^{-1} &= [(A_1A_2 \cdots A_k)A_{k+1}]^{-1} = A_{k+1}^{-1}(A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} \\ &= A_{k+1}^{-1}(A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}) = A_{k+1}^{-1}A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \cdots A_1^{-1} \end{aligned}$$

Ceci montre que P_{k+1} est vraie et par suite P_k est vraie pour tout entier k supérieur ou égal à 2.□

5.6 Transposition

Définition 5.6.1 — *Pour toute matrice* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & & & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ *de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, on appelle* ***transposée*** *de* A *la matrice de* $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ *notée* ${}^tA$ *définie par :*

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & & & a_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} $$

c'est-à-dire telle que si on note ${}^tA = (a'_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$*, on a :*

$$ \forall (i,j) \in \{1,2,\dots,p\} \times \{1,2,\dots,n\} \ , \ a'_{ij} = a_{ji} $$

Autrement dit, ${}^tA$ est obtenue à partir de A par échange des lignes et des colonnes, ce qui revient à faire subir à la matrice A une symétrie par rapport à la droite passant par les coefficients a_{11}, a_{22}, a_{33}, etc . . ..

EXEMPLE —

$$ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} $$

En particulier la transposée d'une matrice ligne est une matrice colonne et vice-versa.

EXEMPLE —

$$ A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow {}^tB = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} $$

Proposition 5.6.1 — *La transposition vérifie les propriétés suivantes :*

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \ , \ {}^t({}^tA) = A$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \ , \ \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \ , \ {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$
- $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2 \ , \ {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \ , \ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \ , \ {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$
- *Pour toute matrice inversible de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*,* $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

PREUVE — Dans cette démonstration, nous noterons toujours par des primes les éléments d'une matrice transposée, c'est-à-dire si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, ${}^tA = (a'_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$

- Ce premier point est immédiat, car échanger deux fois de suite les lignes et les colonnes d'une matrice redonne la matrice de départ.
- En notant

  $$ A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \ , \ \lambda A = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} $$

  il vient :

  $$ \forall (i,j) \in \{1,2,\dots,p\} \times \{1,2,\dots,n\} \ , \ b'_{ij} = b_{ji} = \lambda a_{ji} = \lambda a'_{ij} $$

  soit

  $$ {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA $$

- En notant
$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \ , \ B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \ , \ A+B = C = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$
on obtient :
$$\forall\,(i,j) \in \{1,2,\ldots,p\} \times \{1,2,\ldots,n\} \ , \ c'_{ij} = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = a'_{ij} + b'_{ij}$$
soit
$${}^t(A+B) = {}^tC = {}^tA + {}^tB$$
- En notant
$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \ , \ B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \ , \ AB = C = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}$$
il vient :
$$\forall\,(i,j) \in \{1,2,\ldots,q\} \times \{1,2,\ldots,n\} \ , \ c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} a'_{kj}b'_{ik} = \sum_{k=1}^{p} b'_{ik}a'_{kj}$$
soit
$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$
- Soit A inversible dans $\mathcal{M}_n(E)$. Alors, compte-tenu du résultat qui précède :
$${}^tA\,{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^t(I_n) = I_n \quad \text{et} \quad {}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^t(I_n) = I_n$$
Donc ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

□

Définition 5.6.2 — *Une matrice est dite* **symétrique** *si et seulement si elle est carrée et égale à sa transposée.*

EXEMPLE —
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ est symétrique, mais } \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ ne l'est pas}$$