

Chapitre 5 : Les polygones réguliers

1 Angles inscrits dans un cercle, angle au centre

Définition 1 Etant donné un cercle de centre O , on appelle **angle inscrit** dans ce cercle tout angle \widehat{BAC} dont le sommet A et les points B, C sont des points de ce cercle, et dont les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont deux cordes de ce cercle.

Tout angle inscrit \widehat{BAC} **intercepte** un arc de cercle, l'arc reliant B à C et ne contenant pas le point A .

On appelle **angle au centre** associé à un angle inscrit \widehat{BAC} , l'angle \widehat{BOC} interceptant le même arc de cercle.

Proposition 2 La mesure d'un angle inscrit \widehat{BAC} dans un cercle est la moitié de la mesure de l'angle au centre \widehat{BOC} associé.

2 Définitions et généralités

Définition 3 Un **polygone régulier** est un polygone convexe ou non convexe (auquel cas il est dit étoilé), dont les angles (intérieurs) ont même mesure et dont les côtés ont même longueur.

Ainsi un triangle équilatéral, un carré sont des polygones réguliers ; un rectangle, un losange ne sont des polygones réguliers que lorsque ce sont des carrés.

Théorème 4 Tout polygone régulier admet un **cercle circonscrit**, c'est-à-dire un cercle passant par chaque sommet ; il admet aussi un **cercle inscrit**, c'est-à-dire un cercle tangent intérieurement à chaque côté du polygone régulier. Ces deux cercles ont même centre, appelé **centre du polygone régulier**.

On dit que tout polygone régulier est inscrit dans son cercle circonscrit.

Définition 5 On appelle **apothème** d'un polygone régulier la distance du centre à l'un des côtés ; l'apothème mesure donc le rayon du cercle inscrit dans le polygone, également appelé apothème. Etant donné un côté $[AB]$ d'un polygone régulier, l'angle \widehat{AOB} est appelé **angle au centre** de ce polygone.

Proposition 6 Etant donné un polygone convexe ayant n côtés, une mesure d'un angle au centre est $\frac{2\pi}{n}$ rad ou $\frac{360^\circ}{n}$.

3 Polygones réguliers et isométries

Proposition 7 – Si une isométrie conserve globalement un polygone régulier, c'est nécessairement une réflexion ou une rotation.

- Il existe $2n$ isométries qui conservent globalement un polygone régulier ayant n côtés.
- Un polygone régulier ayant n côtés admet un centre de symétrie si n est pair ; si n est impair, il n'a pas de centre de symétrie.

4 Inscription d'un polygone régulier dans un cercle donné

Le problème est le suivant : comment inscrire un polygone régulier possédant n côtés, convexe ou non, dans un cercle \mathcal{C} de rayon R donné, à l'aide d'une règle et d'un compas ?

Ce problème n'a pas toujours de solution ; si la réponse est simple pour $n = 3, 4, 6, 8, 12$ ou 16 elle est plus délicate pour $n = 5, 10, 15, 17 \dots$, voir impossible pour $n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19 \dots$ selon des résultats énoncés par Gauss puis Wantzel.

Notations. n étant le nombre de côtés du polygone, on notera c_n et a_n (resp c'_n et a'_n) la mesure du côté et de l'apothème du polygone régulier convexe (resp. étoilé).

Il est à noter qu'un polygone convexe n'admet pas nécessairement de polygone étoilé associé, ou peut en admettre plusieurs.

On désigne par O le centre du cercle \mathcal{C} de rayon R ; les constructions ci-dessous sont classées par ordre de difficulté croissante, et reposent sur l'examen des angles au centre des polygones réguliers étudiés.

1. Le carré ($n = 4$).

L'angle au centre mesure 90° , il suffit donc tracer deux diamètres perpendiculaires. L'angle (intérieur) d'un carré mesure 90° , et $c_4 = R\sqrt{2}$, $a_4 = R\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. L'octogone régulier convexe ($n = 8$).

Puisque l'angle au centre mesure 45° , les bissectrices des diamètres précédents et ces diamètres fournissent les huit sommets recherchés. L'angle d'un octogone régulier convexe mesure 135° et $c_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $a_8 = R\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

3. L'octogone régulier étoilé ($n = 8$).

Les huit sommets de l'octogone précédent reliés de deux en deux, redonnent un carré inscrit dans \mathcal{C} ; reliés de trois en trois (ou de cinq en cinq) on obtient un octogone régulier étoilé.

L'angle d'un octogone régulier étoilé mesure 45° et $c'_8 = R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $a'_8 = R\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

4. L'hexagone régulier ($n = 6$).

Les angles au centre mesurent 60° et de ce fait si A et B sont deux sommets consécutifs, le triangle OAB est équilatéral. Chaque côté a pour longueur R , et la construction des six sommets consiste à reporter 6 fois R . L'angle d'un hexagone régulier convexe mesure 120° , et

$$c_6 = R, a_6 = R\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. Le triangle équilatéral ($n = 3$).

L'angle au centre d'un triangle équilatéral mesure 120° ; les sommets précédents, reliés de deux en deux, permettent donc d'inscrire un triangle équilatéral dans le cercle. L'angle d'un triangle équilatéral est de 60° , $c_3 = R\sqrt{3}$, $a_3 = \frac{R}{2}$.

6. Le décagone régulier convexe ($n = 10$).

Il admet une construction assez simple :

- (a) Supposons avoir inscrit un décagone régulier convexe dans le cercle \mathcal{C} , c'est-à-dire avoir mesuré un angle au centre de 36° . Alors le côté du décagone régulier convexe mesure

$$c_{10} = R\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

- (b) Soit $[AB]$ un diamètre du cercle \mathcal{C} et $[OC]$ un rayon de ce cercle, perpendiculaire à (AB) . Soit I le centre du cercle de diamètre $[OC]$; la droite (AI) coupe ce cercle en D et E , D étant entre A et E . On peut calculer AD qui est égal à c_{10} .

Par ailleurs, on obtient $a_{10} = R \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$, et l'angle d'un décagone régulier convexe mesure 144° .

7. Le décagone régulier étoilé ($n = 10$).

En reliant les sommets du décagone régulier convexe de trois en trois, on obtient un décagone régulier étoilé. L'angle d'un décagone régulier étoilé mesure 72° , et $c'_{10} = R \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $a'_{10} = R \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$.

8. Le pentagone régulier convexe ($n = 5$).

Les cinq sommets d'un pentagone régulier convexe peuvent être obtenus en reliant de deux en deux les sommets du décagone régulier convexe. L'angle d'un pentagone régulier convexe mesure 108° , et $c_5 = R \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$, $a_5 = R \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

9. Le pentagone régulier étoilé ($n = 5$).

Les cinq sommets précédents reliés de deux en deux (ou de trois en trois), permettent de représenter un pentagone régulier étoilé. Son angle mesure 36° , et $c'_5 = R \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2}$, $a'_5 = R \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Il existe d'autres constructions de ces polygones, certaines seront développées en exercice.