

## Révisions de première année

<b>1</b>	<b>Sommes et produits</b>	<b>2</b>
1.1	Sommes . . . . .	2
1.2	Produits . . . . .	3
1.3	Formule du binôme . . . . .	4
1.4	Sommes doubles . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Suites réelles</b>	<b>8</b>
2.1	Suites usuelles . . . . .	8
2.2	Convergence des suites réelles . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Fonctions réelles d'une variable réelle</b>	<b>12</b>
3.1	Fonctions usuelles . . . . .	12
3.2	Plan d'étude d'une fonction . . . . .	18
3.3	Bijection et bijection réciproque . . . . .	23

### Consignes

*On reprend dans ce chapitre certains résultats du programme d'ECE1 sur les sommes et produits, les suites réelles et les fonctions réelles d'une variable réelle. Rien de nouveau donc, mais il est essentiel de s'assurer que tous les résultats de ce chapitre sont connus, et de combler vos lacunes éventuelles dès maintenant. Ce travail est à faire avec le plus grand sérieux avant la rentrée. C'est votre dernière occasion de vous mettre à jour sur ces notions.*

*Les premières colles et le DS 1 porteront sur ce chapitre.*

Anthony Mansuy

Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)

Page personnelle : <http://anthony-mansuy.fr>

E-mail : [mansuy.anthony@hotmail.fr](mailto:mansuy.anthony@hotmail.fr)

# 1 Sommes et produits

## Compétences attendues.

- ✓ Calculer une somme ou un produit à l'aide des formules sur les sommes usuelles ou par télescopage.
- ✓ Connaître la formule explicite et les relations sur les coefficients binomiaux et en déduire la construction du triangle de Pascal.
- ✓ Connaître la formule du binôme de Newton et savoir l'utiliser pour développer une expression ou calculer une somme.
- ✓ Savoir utiliser les formules d'interversion sur les sommes doubles pour les calculer.

À vous de vous assurer, à l'issue de chaque chapitre, que ces compétences sont bien acquises !

## 1.1 Sommes

### Définition.

Soient  $p \leq n$  deux entiers naturels et  $x_p, x_{p+1}, \dots, x_{n-1}, x_n$  des réels. La somme de  $k$  allant de  $p$  à  $n$  des  $x_k$  est notée :

$$\sum_{k=p}^n x_k = x_p + x_{p+1} + \dots + x_{n-1} + x_n.$$

Rappelons les seules opérations autorisées sur les sommes :

- On peut séparer la somme d'une somme en deux :

$$\sum_{k=0}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=0}^n x_k + \sum_{k=0}^n y_k.$$

- On peut factoriser par un réel  $\lambda$  qui ne dépend pas de l'indice :

$$\sum_{k=0}^n \lambda x_k = \lambda \sum_{k=0}^n x_k.$$

- On a enfin la relation de Chasles (où  $p \leq m \leq n$ ) :

$$\sum_{k=p}^n x_k = \sum_{k=p}^m x_k + \sum_{k=m+1}^n x_k.$$

### Théorème 1 (Sommes usuelles)

Soit  $n, p \in \mathbb{N}$ , avec  $p \leq n$ .

- (1) Somme d'une constante  $a$  (indépendante de l'indice de sommation  $k$ ) :

$$\sum_{k=p}^n a = (n - p + 1) \times a.$$

- (2) Sommes des premières puissances des  $n$  premiers entiers naturels :

$$(i) \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (ii) \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad (iii) \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- (3) Somme géométrique (avec  $q \in \mathbb{R}^*$ ) :

$$\sum_{k=p}^n q^k = \begin{cases} n - p + 1 & \text{si } q = 1, \\ q^p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1. \end{cases}$$

Pour calculer une somme  $\sum_{k=p}^n x_k$ , on pourra :

- Utiliser les formules sur les sommes usuelles (si le terme général  $x_k$  est une combinaison linéaire de constantes,  $k$ ,  $k^2$ ,  $k^3$ ,  $q^k$ ) :

**Exercice.** Calculer  $\sum_{k=2}^n (k^2 - 3 \times 2^k)$ .

 **Correction.**

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n (k^2 - 3 \times 2^k) &= \sum_{k=2}^n k^2 - 3 \sum_{k=2}^n 2^k = \sum_{k=1}^n k^2 - 1^2 - 3 \left( \sum_{k=0}^n 2^k - 2^0 - 2^1 \right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 - 3 \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + 9 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 11 - 3 \times 2^{n+1}. \end{aligned}$$

- Faire du télescopage (si le terme général  $x_k$  peut s'écrire sous la forme  $u_{k+1} - u_k$  ou  $u_k - u_{k+1}$ ) :

**Exercice.** Calculer  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ .

 **Correction.**

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

- Faire un changement de variable (si les simplifications pour le télescopage sont trop compliquées) :

**Exercice.** Calculer  $\sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$ .

 **Correction.**

En posant  $i = k - 1$  et  $j = k + 1$  à la deuxième égalité :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} - \sum_{j=3}^{n+1} \frac{1}{j} \\ &= \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^{n-1} \frac{1}{i} \right) - \left( \sum_{j=3}^{n-1} \frac{1}{j} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

## 1.2 Produits

### Définition.

Soient  $p \leq n$  deux entiers naturels et  $x_p, x_{p+1}, \dots, x_{n-1}, x_n$  des réels. Le produit de  $k$  allant de  $p$  à  $n$  des  $x_k$  est notée :

$$\prod_{k=p}^n x_k = x_p \times x_{p+1} \times \dots \times x_{n-1} \times x_n.$$

Rappelons les seules opérations autorisées sur les produits :

- On peut séparer le produit d'un produit en deux :

$$\prod_{k=0}^n (x_k \times y_k) = \left( \prod_{k=0}^n x_k \right) \times \left( \prod_{k=0}^n y_k \right).$$

- Le produit d'un quotient est égal au quotient des produits :

$$\prod_{k=0}^n \frac{x_k}{y_k} = \frac{\prod_{k=0}^n x_k}{\prod_{k=0}^n y_k}.$$

- La relation de Chasles s'applique également pour les produits (où  $p \leq m \leq n$ ) :

$$\prod_{k=0}^n x_k = \left( \prod_{k=0}^m x_k \right) \times \left( \prod_{k=m+1}^n x_k \right)$$

Pour calculer un produit, on pourra :

- Se ramener à une somme avec l'une des formules suivantes :

$$\prod a^{x_k} = a^{\sum x_k}, \quad \prod \exp(x_k) = \exp\left(\sum x_k\right), \quad \ln\left(\prod x_k\right) = \sum \ln(x_k).$$

**Exercice.** Calculer  $\prod_{k=1}^n \frac{3}{4^k}$ .

 **Correction.**

$$\prod_{k=1}^n \frac{3}{4^k} = \frac{\prod_{k=1}^n 3}{\prod_{k=1}^n 4^k} = \frac{3^{\sum_{k=1}^n 1}}{4^{\sum_{k=1}^n k}} = \frac{3^n}{4^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{3^n}{2^{n(n+1)}}.$$

- Faire du télescopage (si le terme général  $x_k$  peut s'écrire sous la forme  $\frac{u_{k+1}}{u_k}$  ou  $\frac{u_k}{u_{k+1}}$ ) :

**Exercice.** Calculer  $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ .

 **Correction.**

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{\cancel{2}}{1} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times \dots \times \frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}} \times \frac{n+1}{\cancel{n}} = n+1.$$

### 1.3 Formule du binôme

#### Définition.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On appelle **factorielle**  $n$  et on note  $n!$  l'entier défini par  $n! = \prod_{k=1}^n k$ .

**Remarque.** On a  $0! = 1$  et si  $n \geq 1$ ,  $n! = n \times (n-1)!$ .

**Définition.**

Soient  $n$  et  $k$  deux entiers tels que  $0 \leq k \leq n$ . On appelle **coefficient binomial** " $k$  parmi  $n$ " la quantité :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Rappel.** L'entier  $\binom{n}{k}$  représente :

- le nombre de parties à  $k$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments ;
- le nombre de façons de choisir  $k$  objets parmi  $n$  objets sans répétition et sans ordre.

**Propriété 2 (Relations sur les coefficients binomiaux)**

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

(1) Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  (symétrie des coefficients binomiaux).

(2) Pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$  (formule du triangle de Pascal).

**Remarque.** Cette dernière relation nous permet de construire le **triangle de Pascal**, qui nous donne une construction rapide des premiers coefficients binomiaux :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	...	$k$	$k+1$	...	$n$	$n+1$
$n=0$	1										
$n=1$	1	1									
$n=2$	1	2	1								
$n=3$	1	3	3	1							
$n=4$	1	4	6	4	1						
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$									
$n$	1	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$			...	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$	...	1	
$n+1$	1	$\binom{n+1}{1}$	$\binom{n+1}{2}$			...		$\binom{n+1}{k+1}$		...	1

**Théorème 3 (Formule du binôme de Newton)**

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels et  $n$  un entier naturel. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

La formule du binôme de Newton permet de :

- Développer une expression du type  $(a+b)^n$  :

**Exercice.** Développer  $(x-2)^4$ .

 **Correction.**

$$\begin{aligned} (x-2)^4 &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} x^k (-2)^{4-k} \\ &= \binom{4}{0} x^0 (-2)^{4-0} + \binom{4}{1} x^1 (-2)^{4-1} + \binom{4}{2} x^2 (-2)^{4-2} + \binom{4}{3} x^3 (-2)^{4-3} + \binom{4}{4} x^4 (-2)^{4-4} \\ &= (-2)^4 + 4 \times x \times (-2)^3 + 6 \times x^2 \times (-2)^2 + 4 \times x^3 \times (-2) + x^4 \\ &= 16 - 32x + 24x^2 - 8x^3 + x^4. \end{aligned}$$

- Calculer une somme (s'il y a un coefficient binomiale dans l'expression de son terme général) :

**Exercice.** Calculer  $\sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k}$ .

 **Correction.**

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^n 2^{k+1} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^n 2^{k+1} \frac{n!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{n+1} \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 2^{k+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} 2^l \binom{n+1}{l} \quad (\text{en posant } l = k+1) \\ &= \frac{1}{n+1} \left( \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} 2^l 1^{n+1-l} - 1 \right) = \frac{1}{n+1} (3^{n+1} - 1). \end{aligned}$$

## 1.4 Sommes doubles

### Sommes doubles à indices indépendants

On considère des réels  $x_{i,j}$  avec  $i \in [1, n]$  et  $j \in [1, m]$  dont on cherche à calculer la somme notée  $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_{i,j}$ .

#### Propriété 4 (Interversion de sommes à indices indépendants)

On a les égalités suivantes :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m x_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_{i,j} \right).$$

**Exemple.** Calculer  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{2^j}$ .

 **Correction.**

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{2^j} &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n i \times \left(\frac{1}{2}\right)^j \right) = \sum_{j=1}^n \left( \left(\frac{1}{2}\right)^j \left( \sum_{i=1}^n i \right) \right) = \sum_{j=1}^n \left( \left(\frac{1}{2}\right)^j \times \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{n(n+1)}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{n(n+1)}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right). \end{aligned}$$

### Sommes doubles à indices dépendants

On suppose à présent que  $n = m$ , et on souhaite calculer :

- $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_{i,j}$  : somme de tous les termes  $x_{i,j}$  dont les indices  $i$  et  $j$  vérifient  $1 \leq i \leq j \leq n$ .
- $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{i,j}$  : somme de tous les termes  $x_{i,j}$  dont les indices  $i$  et  $j$  vérifient  $1 \leq i < j \leq n$ .

**Propriété 5** (Interversion de sommes à indices dépendants)

On a les égalités suivantes :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=i}^n x_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^j x_{i,j} \right)$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{j=i+1}^n x_{i,j} \right) = \sum_{j=2}^n \left( \sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j} \right)$$

**Méthode.**

Ces égalités ne sont pas à apprendre par cœur. Il faudra les retrouver en pratique en procédant ainsi :

- On choisit la variable sur laquelle on somme en premier, par exemple  $i$ . On écrit alors les sommes

sans les bornes :  $\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=i}^n \right)$ .

- On détermine les bornes de la somme  $\sum_{i=1}^n$  en regardant l'intervalle d'entiers parcouru par  $i$ . Ces bornes ne doivent pas dépendre de  $j$ .

- On détermine enfin les bornes de la deuxième somme  $\sum_{j=1}^n$  de la manière suivante : à  $i$  fixé, on regarde l'intervalle d'entiers parcouru par  $j$ . Cet intervalle dépend de  $i$ .

**Exercice.** Calculer  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^3}{j(j+1)}$ .

**Correction.**

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^3}{j(j+1)} &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^j \frac{i^3}{j(j+1)} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} \left( \sum_{i=1}^j i^3 \right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} \times \frac{j^2(j+1)^2}{4} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{4} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n j^2 + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} + \frac{n(n+1)}{8}. \end{aligned}$$

## 2 Suites réelles

### Compétences attendues.

- ✓ Savoir identifier et déterminer l'expression explicite d'une suite géométrique, arithmétique, arithmético-géométrique et d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
- ✓ Calculer la limite d'une suite sous forme explicite, en levant une forme indéterminée si nécessaire.
- ✓ Prouver la convergence d'une suite à l'aide d'un théorème de passage à la limite dans les inégalités, du théorème des suites monotones ou du théorème des suites adjacentes.

### 2.1 Suites usuelles

#### Propriété 6 (Suites arithmétiques, suites géométriques)

- Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est dite **arithmétique** lorsqu'il existe  $r \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

*Forme explicite :* Pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$ .

- Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est dite **géométrique** lorsqu'il existe  $q \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

*Forme explicite :* Pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n = q^{n-n_0}u_{n_0}$ .

#### Définition.

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **arithmético-géométrique** s'il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 1$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

#### Méthode.

Pour obtenir la forme explicite d'une suite arithmético-géométrique  $(u_n)$ , on procèdera comme suit :

1. On cherche l'unique solution  $x_0$  de l'équation au point fixe :  $x = ax + b$ .
2. On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = u_n - x_0$  et on démontre que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $a$ .
3. On donne la forme explicite de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  puis celle de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice.** Déterminer la forme explicite de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -u_n + 4.$$



 **Correction.**

On est ici dans le cas d'une suite arithmético-géométrique. On en cherche donc le point fixe :

$$x_0 = -x_0 + 4 \Leftrightarrow x_0 = 2.$$

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = u_n - 2$ . Alors :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -u_n + 4 - 2 = -u_n + 2 = -(u_n - 2) = -v_n.$$

Ainsi  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $(-1)$ . On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (-1)^n v_0 = (-1)^n (1 - 2) = (-1)^{n+1}$$

et donc la forme explicite de  $(u_n)$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + x_0 = (-1)^{n+1} + 2.$$

**Propriété 7** (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2)

Une suite  $(u_n)$  est **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

*Forme explicite* : On résout l'équation caractéristique  $x^2 = ax + b$ .

- S'il y a deux solutions distinctes  $x_1$  et  $x_2$ , alors il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n.$$

- S'il y a une unique solution  $x_0$ , alors il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)x_0^n$$

Pour déterminer  $\lambda$  et  $\mu$ , on utilise deux termes de la suite (habituellement  $u_0$  et  $u_1$ ).

**Exercice.** Déterminer la forme explicite de la suite  $(u_n)$  (appelée suite de Fibonacci) définie par  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

 **Correction.**

Remarquons tout d'abord qu'il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On résout son équation caractéristique :

$$x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Posons  $P(x) = x^2 - x - 1$ .  $P$  admet deux racines réelles distinctes  $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  et  $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . D'après la propriété précédent, il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$$

Les cas  $n = 0$  et  $n = 1$  conduisent à résoudre le système  $(E)$  : 
$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1 \end{cases}.$$

On a :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda(r_1 - r_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

D'où finalement : 
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

## 2.2 Convergence des suites réelles

### Définition.

- On dit que  $(u_n)$  **converge vers**  $\ell \in \mathbb{R}$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient les  $u_n$  pour tous les indices  $n$ , sauf pour un nombre fini d'entre eux, ce qui s'écrit en termes quantifiés :

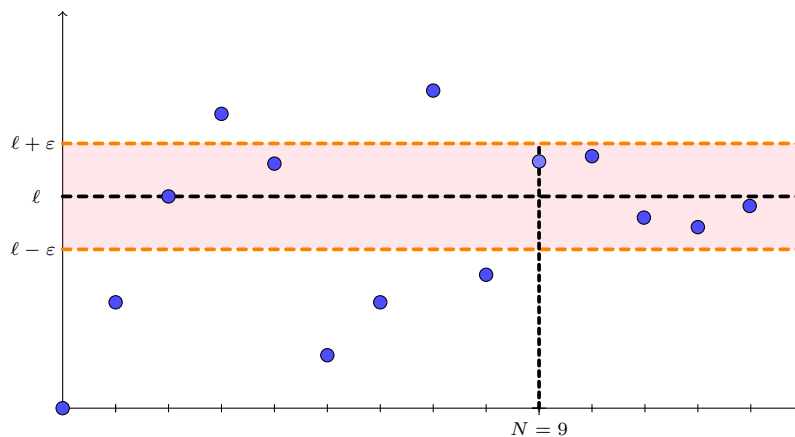
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

- On dit que  $(u_n)$  **diverge vers**  $+\infty$  si pour tout réel  $a$ , les  $u_n$  sont strictement plus grand que  $a$  pour tous les indices  $n$ , sauf pour un nombre fini d'entre eux, ce qui s'écrit en termes quantifiés :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n > a.$$

- On dit que  $(u_n)$  **diverge vers**  $-\infty$  si pour tout réel  $b$ , les  $u_n$  sont strictement plus petit que  $b$  pour tous les indices  $n$ , sauf pour un nombre fini d'entre eux, ce qui s'écrit en termes quantifiés :

$$\forall b \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n < b.$$



Convergence de la suite  $(u_n)$  vers  $\ell$  : pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n$  est dans la "bande"  $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ .

### Théorème 8 (Passage à la limite dans les inégalités larges)

On considère deux suites **convergentes**  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et deux nombres réels  $m$  et  $M$ .

- Si  $u_n \leq M$  à partir d'un certain rang  $n_0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq M$ .
- Si  $u_n \geq m$  à partir d'un certain rang  $n_0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq m$ .
- Si  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang  $n_0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .



### Attention.

Ce théorème n'est pas valable si les inégalités sont strictes. Par exemple,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} > 0 \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} > 0.$$

Il faut retenir que le passage à la limite dans les inégalités transforme les inégalités (strictes et larges) en inégalités larges :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \geq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \geq 0.$$

**Théorème 9 (d'encadrement)**

Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites telles que :

$$u_n \leq v_n \leq w_n \quad \text{à partir d'un certain rang } n_0.$$

Si  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers une même limite  $\ell$ , alors  $(v_n)$  converge aussi vers  $\ell$ .

**Théorème 10 (Technique de majoration ou de minoration)**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles telles que :

$$u_n \leq v_n \quad \text{à partir d'un certain rang } n_0.$$

- (1) Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .
- (2) Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

**Théorème 11 (des suites monotones)**

- (1) Toute suite **croissante** et **majorée** (par une **constante**  $M$ ) est **convergente**.  
Toute suite **croissante** et **non majorée** diverge vers  $+\infty$ .
- (2) Toute suite est **décroissante** et **minorée** (par une constante  $m$ ) est **convergente**.  
Toute suite **décroissante** et **non minorée** diverge vers  $-\infty$ .

**Attention.**

- Le majorant  $M$  et le minorant  $m$  sont des constantes, elles ne doivent donc pas dépendre de  $n$  !
- La suite ne tend pas forcément vers le majorant  $M$  ou le minorant  $m$ . Ce théorème prouve l'existence d'une limite  $\ell$ , mais sans donner sa valeur !

**Définition.**

Deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites **adjacentes** lorsqu'elles vérifient les trois hypothèses suivantes :

- (1)  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,
- (2)  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante,
- (3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ .

**Théorème 12 (des suites adjacentes)**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux **suites adjacentes** telles que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. Alors,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **convergent vers une même limite**  $\ell \in \mathbb{R}$  et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

### 3 Fonctions réelles d'une variable réelle

#### Compétences attendues.

- ✓ Factoriser un polynôme ou une fonction rationnelle à l'aide d'une division euclidienne ou par identification.
- ✓ Décomposer en éléments simples une fonction rationnelle.
- ✓ Connaître les propriétés de la valeur absolue, de la partie entière, de la racine carrée.
- ✓ Connaître les propriétés algébriques des fonctions logarithme et exponentielle.
- ✓ Connaître les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions usuelles, les limites et savoir tracer leurs courbes représentatives.
- ✓ Étudier la parité d'une fonction.
- ✓ Calculer la limite d'une fonction, en levant une forme indéterminée si nécessaire.
- ✓ Interpréter les limites d'une fonction en terme d'asymptotes verticales ou horizontales ou de prolongement par continuité.
- ✓ Démontrer que la courbe représentative d'une fonction admet une asymptote oblique et déterminer la position relative de la courbe et de son asymptote.
- ✓ Déterminer le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité d'une fonction et calculer sa dérivée.
- ✓ Étudier la continuité et la dérivabilité d'une fonction en un point.
- ✓ Étudier la convexité d'une fonction et connaître ses différentes caractérisations.
- ✓ Prouver qu'une fonction est bijective à l'aide du théorème de la bijection.
- ✓ Déterminer la bijection réciproque d'une fonction bijective.

#### 3.1 Fonctions usuelles

##### Fonctions polynômiales

##### Définition.

On dit qu'une fonction  $P$  est une **fonction polynômiale** ou un **polynôme** de degré  $n \in \mathbb{N}$  s'il existe des réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  avec  $a_n \neq 0$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n.$$

Les **fonctions polynômiales** sont définies, continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Il sera souvent utile d'écrire un polynôme sous forme **factorisée**, c'est-à-dire comme produit de polynômes de degré 1 ou de polynômes de degré 2 sans racine.



##### Méthode.

Pour factoriser un polynôme  $P$ ,

1. On cherche une racine évidente, c'est-à-dire un réel  $a$  tel que  $P(a) = 0$ .
2. Dans ce cas, il existe un polynôme  $Q$  de degré  $n - 1$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - a)Q(x)$ . Pour déterminer  $Q$ , on a deux options :
  - Soit poser la division euclidienne de  $P$  par  $(x - a)$ .
  - Soit écrire  $P(x) = (x - a)(b_0 + b_1x + \dots + b_{n-1}x^{n-1})$ , développer le second membre et identifier les coefficients.
3. On poursuit en factorisant  $Q$  et ainsi de suite jusqu'à obtenir un polynôme de degré 2 qu'on factorise en calculant son déterminant.

**Exercice.** Factoriser le polynôme  $P(x) = 6x^3 + x^2 - 4x + 1$ .

 **Correction.**

$P(-1) = 6(-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) + 1 = -6 + 1 + 4 + 1 = 0$  donc  $-1$  est racine de  $P$  et on effectue la division euclidienne de  $P$  par  $x + 1$  :

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 + x^2 - 4x + 1 & x + 1 \\ - (6x^3 + 6x^2) & 6x^2 - 5x + 1 \\ \hline & - 5x^2 - 4x + 1 \\ & - (-5x^2 - 5x) \\ \hline & x + 1 \\ & - (x + 1) \\ \hline & 0 \end{array}$$

Ainsi,  $P(x) = (x + 1)Q(x)$  avec  $Q(x) = 6x^2 - 5x + 1$ .

Il reste à factoriser  $Q$  en calculant son discriminant.  $\Delta = 1 > 0$  donc  $Q$  admet deux racines :

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{12} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{12} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit la factorisation de  $Q$  :  $Q(x) = 6(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2}) = (3x - 1)(2x - 1)$ .

On a alors :  $P(x) = (x + 1)Q(x) = (x + 1)(3x - 1)(2x - 1)$ .

## Fonctions rationnelles

### Définition.

On appelle **fonction rationnelle** toute fonction  $R$  qui est le quotient de deux polynômes  $P$  et  $Q$  :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Les **fonctions rationnelles** sont définies, continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$  privé des racines du dénominateur.

Une fonction rationnelle peut s'écrire sous forme :

- **Factorisée** (avec éventuellement une mise au même dénominateur) :



### Méthode.

Pour factoriser une fonction rationnelle,

1. On factorise les dénominateurs des fractions.
2. On détermine le dénominateur commun : c'est le produit des facteurs aux dénominateurs en prenant pour chacun la puissance la plus élevée où il apparaît.
3. On met les fractions au même dénominateur.
4. Pour finir, on développe puis on factorise le numérateur.

**Exemple.** Factoriser la fonction rationnelle  $R(x) = \frac{2}{x^2 - 4} + \frac{x}{x^2 + 4x + 4}$ .



### Correction.

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{2}{x^2 - 4} + \frac{x}{x^2 + 4x + 4} = \frac{2}{(x - 2)(x + 2)} + \frac{x}{(x + 2)^2} \\ &= \frac{2(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)^2} + \frac{x(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 2}{(x - 2)(x + 2)^2}. \end{aligned}$$

- **Développée** (en effectuant une décomposition en éléments simples) :



### Méthode.

Pour développer une fonction rationnelle en une somme de fonctions rationnelles plus simples, on réduit la somme au même dénominateur, puis on procède par identification des coefficients des numérateurs.

**Exemple.** Déterminer les réels  $a, b, c$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$



### Correction.

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1)}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{(bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (b+c)x + (a+c)}{(x+1)(x^2+1)} \end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + b &= 0 & (L_1) \\ b + c &= 0 & (L_2) \\ a &+ c = 2 & (L_3) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b &= 0 & (L_1) \\ b + c &= 0 & (L_2) \\ -b + c &= 2 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b &= 0 & (L_1) \\ b + c &= 0 & (L_2) \\ 2c &= 2 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -1 \\ c &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $\frac{2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1}$ .

## Fonction valeur absolue

### Définition.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La **valeur absolue** de  $x$  est le nombre réel, noté  $|x|$ , défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La fonction **valeur absolue**  $x \mapsto |x|$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .

**Remarque.** La valeur absolue peut être interprétée comme une distance :

$$|y - x| = d(x, y) = \text{distance entre } x \text{ et } y.$$

En particulier, on a les équivalences suivantes :

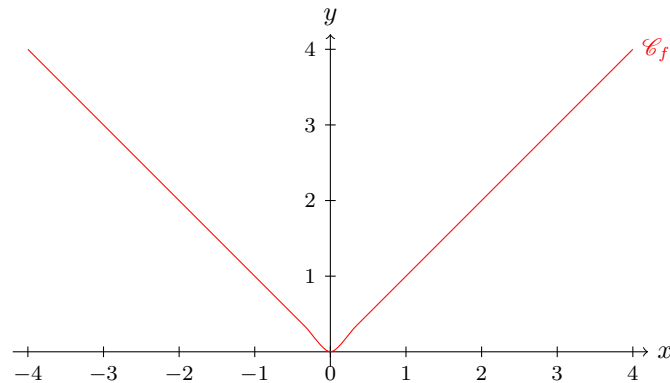
- $|x - a| \leq r \Leftrightarrow d(a, x) \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r, a + r]$ ,
- $|x - a| \geq r \Leftrightarrow d(a, x) \geq r \Leftrightarrow x \in ]-\infty, a - r] \cup [a + r, +\infty[$ .

On a les mêmes équivalences en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes et les intervalles fermés par des intervalles ouverts.

**Propriété 13** (Valeur absolue d'un nombre réel)

- (1) Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (inégalité triangulaire).
- (2) Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $|x| \times |y| = |x \times y|$ .
- (3) Pour tous  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}^*$ ,  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ .

**Représentation graphique.** Voici la courbe représentative de la fonction valeur absolue :

**Fonction partie entière****Définition.**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La **partie entière** de  $x$ , noté  $\lfloor x \rfloor$ , est le plus grand entier relatif qui est inférieur ou égal à  $x$ . Autrement dit,  $\lfloor x \rfloor$  est l'unique entier relatif qui vérifie :

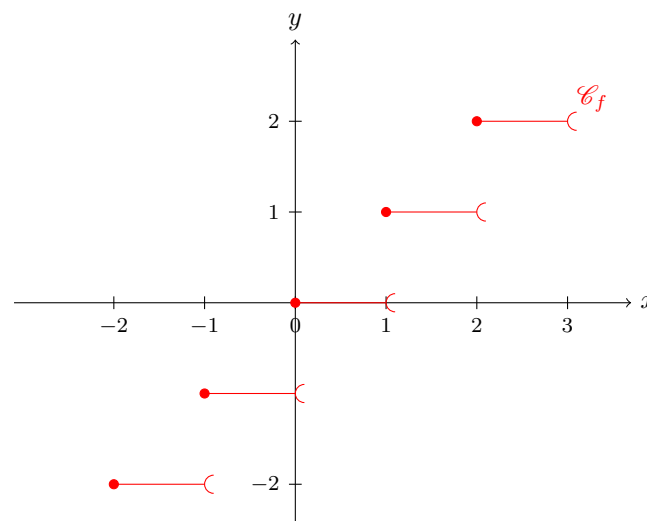
$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

La fonction **partie entière**  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , continue et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  (elle est discontinue en tous les points entiers).

**Méthode.**

Les inégalités  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$  sont très utiles en pratique puisqu'elles permettent dans beaucoup de situations de se débarrasser de la partie entière. Il faut donc parfaitement les connaître et penser à s'y ramener.

**Représentation graphique.** Voici la courbe représentative de la fonction partie entière :



## Fonction racine carrée

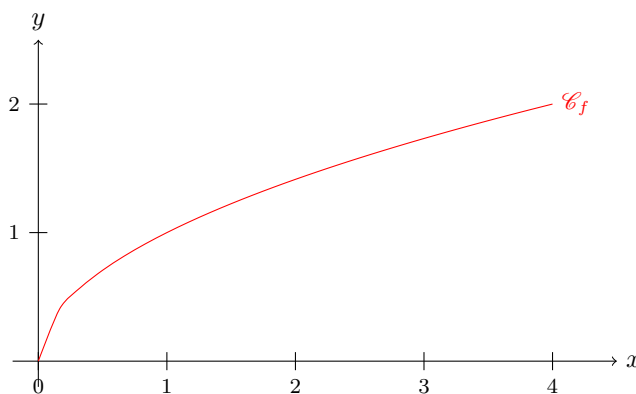
### Définition.

La fonction **racine carrée** est la fonction qui, à tout réel positif  $x$ , associe  $\sqrt{x}$ . Elle est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$  et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

### Propriété 14 (des racines carrées)

- (1) Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}_+$ ,  $\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{x \times y}$ .
- (2) Pour tous  $x \in \mathbb{R}_+$  et  $y \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$ .
- (3) Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $(\sqrt{x})^2 = x$ .
- (4) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sqrt{x^2} = |x|$ .

**Représentation graphique.** Voici la courbe représentative de la fonction racine carrée :



## Fonctions logarithme et exponentielle

### Définition.

- On appelle fonction **logarithme** l'unique fonction notée  $\ln$ , définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0.$$

- On appelle fonction **exponentielle** l'unique fonction notée  $\exp$ , définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x) \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1.$$

### Théorème 15 (Propriétés algébriques des fonctions logarithme et exponentielle)

Pour tous réels  $x, y > 0$  et pour tout entier  $n$ ,

$$(1) \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y).$$

$$(2) \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

$$(3) \ln(x^n) = n \ln(x).$$

$$(4) \exp(\ln(x)) = x.$$

Pour tous réels  $x, y$  et pour tout entier  $n$ ,

$$(6) \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

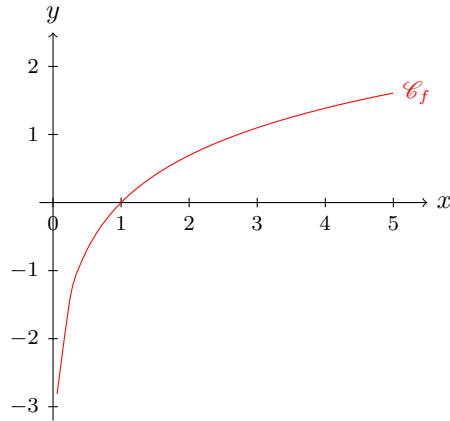
$$(7) \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

$$(8) \exp(nx) = (\exp(x))^n.$$

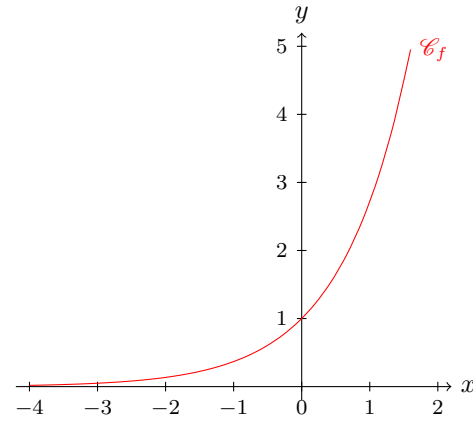
$$(9) \ln(\exp(x)) = x.$$



**Représentation graphique.** Voici les courbes représentatives des fonctions logarithme et exponentielle :



Fonction logarithme



Fonction exponentielle

## Fonctions puissances

### Définition.

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On appelle **fonction puissance** d'exposant  $\alpha$  la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$f(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$$

### Remarques.

1. Cette définition généralise celle des puissances entières lorsque  $x > 0$ .
2. Pour tout  $x > 0$ ,  $x^{1/2} = \sqrt{x}$ .

Les propriétés des puissances réelles sont semblables à celles des puissances entières :

### Propriété 16 (Puissance réelle d'un nombre réel strictement positif)

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  des réels quelconques. Alors :

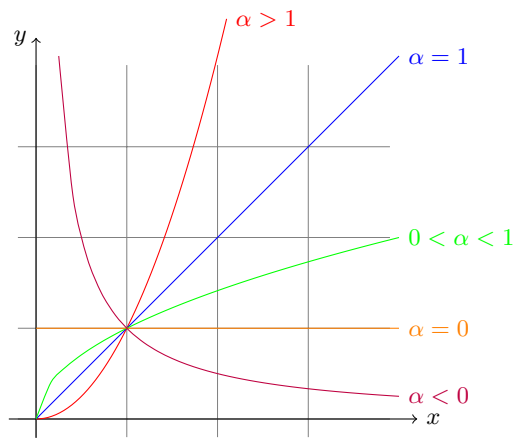
(1) Pour tout  $x > 0$ ,  $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ ;  $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$ ;  $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \times \beta}$ .

(2) Pour tout  $x, y > 0$ ,  $x^\alpha \times y^\alpha = (x \times y)^\alpha$ ;  $\frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$ .

(3) Pour tout  $x > 0$ ,  $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$ .

(4) Pour tout réel  $x$ ,  $e^{\alpha x} = (e^x)^\alpha$ .

**Représentation graphique.** Voici les différentes allures de la courbe représentative de la fonction  $x \mapsto x^\alpha$  suivant les valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$  :



### 3.2 Plan d'étude d'une fonction

Rappelons les différents points à traiter dans l'ordre lorsqu'il faut étudier une fonction  $f$  :

#### Pour les fonctions puissances

Dans le cas des fonctions puissances du type  $x \mapsto (u(x))^\alpha$  (avec  $\alpha$  non entier) ou  $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ , on commencera **toujours** l'étude en les écrivant sous forme exponentielle :

$$(u(x))^\alpha = e^{\alpha \ln(u(x))} \quad \text{ou} \quad u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln(u(x))}.$$

**Exemples.**  $x^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln(x)}$ ,  $\ln(x)^x = e^{x \ln(\ln(x))}$ .

#### Domaine de définition

On détermine le **domaine de définition**  $\mathcal{D}_f$  de  $f$  à partir de l'expression de  $f(x)$ . S'il y a :

- Un dénominateur : il faut supprimer de  $\mathcal{D}_f$  les racines de ce dénominateur.
- $\sqrt{u(x)}$  : il faut résoudre l'inéquation  $u(x) \geq 0$  et restreindre  $\mathcal{D}_f$  à l'ensemble des solutions.
- $\ln(u(x))$  : il faut résoudre l'inéquation  $u(x) > 0$  et restreindre  $\mathcal{D}_f$  à l'ensemble des solutions.

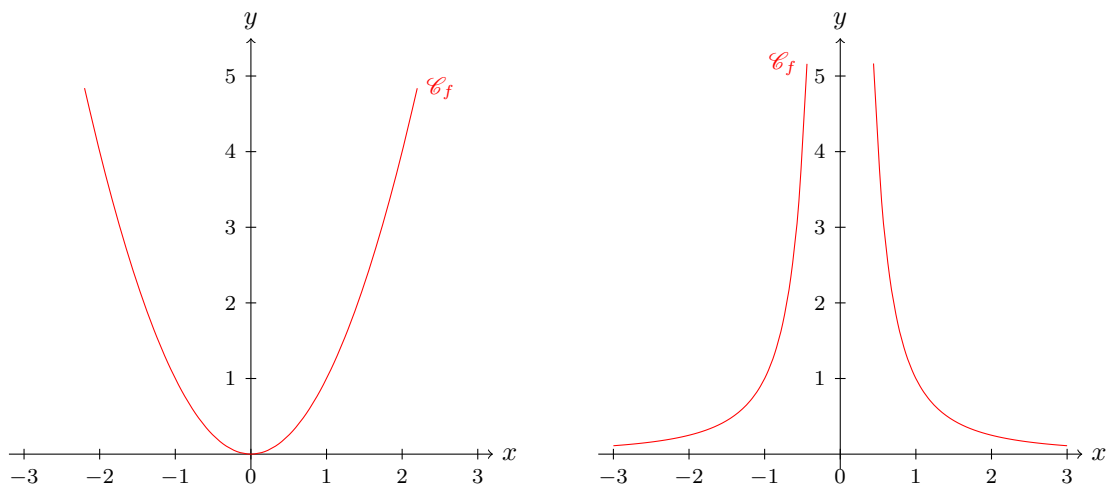
#### Parité (uniquement si l'énoncé le demande)

Pour étudier la parité de  $f$ , on procède en deux étapes :

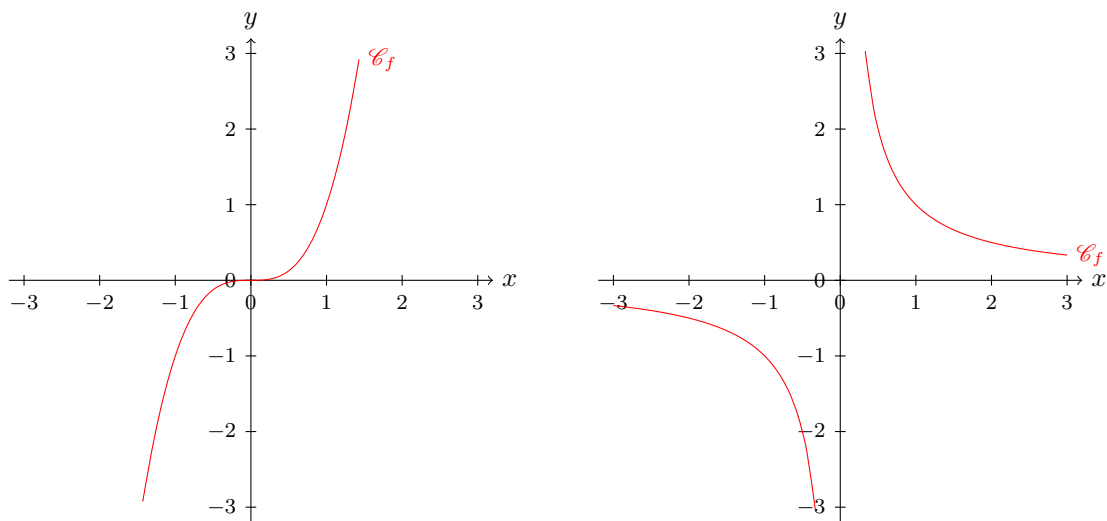
- On vérifie que  $\mathcal{D}_f$  est symétrique par rapport à 0 (il suffit de le constater).
- On exprime  $f(-x)$  à l'aide de  $f(x)$  :
  - Si pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ ,  $f(-x) = f(x)$ , alors  $f$  est **paire** et sa courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ( $Oy$ ).
  - Si pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ ,  $f(-x) = -f(x)$ , alors  $f$  est **impaire** et sa courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  est symétrique par rapport à l'origine du repère  $O$ .

**Exemples.**

- Les fonctions du type  $x \mapsto x^{2n}$  et  $x \mapsto \frac{1}{x^{2n}}$  sont paires :



- Les fonctions du type  $x \mapsto x^{2n+1}$  et  $x \mapsto \frac{1}{x^{2n+1}}$  sont impaires :



### Limites aux bornes du domaine de définition

Pour calculer les limites de  $f$  aux bornes du domaine de définition  $\mathcal{D}_f$  :

- On détermine la limite de chacun des termes apparaissant dans l'expression de la fonction.
- Si on obtient aucune **forme indéterminée**  $\infty - \infty$ ,  $0 \times (\pm\infty)$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  ou  $\frac{0}{0}$  :

On peut alors calculer directement la limite de la fonction à l'aide des opérations sur les limites (en distinguant éventuellement limite à gauche et limite à droite).

- Si on obtient une **forme indéterminée** :

On transforme l'expression de la fonction pour lever l'indétermination. Plus précisément :

- Dans le cas  $\infty - \infty$  : on factorisera par le terme dominant ou on multipliera par la quantité conjuguée (s'il y a des racines carrées).
- Dans les cas  $0 \times (\pm\infty)$  et  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  : on factorisera par le terme dominant puis on utilisera si nécessaire les **croissances comparées** (rappelons que l'exponentielle l'emporte sur la puissance, qui l'emporte sur le logarithme).
- Dans le cas  $\frac{0}{0}$  : on factorisera l'expression ou on multipliera par la quantité conjuguée (s'il y a des racines carrées).

On calcule ensuite la limite de la fonction à l'aide des opérations sur les limites.

### Asymptotes

Après avoir déterminé les limites aux bornes du domaine de définition, on précise s'il y a des asymptotes horizontales ou verticales à la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  :

- Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  (où  $x_0 \in \mathbb{R}$ ), alors  $\mathcal{C}_f$  admet une **asymptote verticale** d'équation  $x = x_0$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$ , alors  $\mathcal{C}_f$  admet une **asymptote horizontale** d'équation  $y = \ell$  en  $\pm\infty$ .

Uniquement si l'énoncé le demande, on étudiera si  $\mathcal{C}_f$  admet une **asymptote oblique**  $\Delta$  d'équation  $y = ax + b$  en  $+\infty$  (même chose en  $-\infty$ ). Pour cela, on étudie l'écart algébrique  $\varepsilon(x) = f(x) - (ax + b)$  entre  $\mathcal{C}_f$  et  $\Delta$  :

- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$ , alors  $\Delta$  est asymptote de  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .
- Le signe de  $\varepsilon(x)$  donne la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et  $\Delta$ .

## Étude de la continuité

On pensera à toujours préciser le **domaine de continuité** : c'est le même que le domaine de définition sauf s'il y a une **partie entière**.


Si l'énoncé le demande, il faudra étudier la continuité en un point  $x_0 \in \mathcal{D}_f$  en dehors du domaine de continuité. Pour cela, on calcule la limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  :

- Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , alors  $f$  est continue en  $x_0$ .
- Sinon,  $f$  n'est pas continue en  $x_0$ .

On peut éventuellement distinguer continuité à gauche et à droite si les limites sont différentes en  $x_0^-$  et  $x_0^+$ .

**Exercice.** Étudier la continuité en 0 de la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

 **Correction.**

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$ , on a  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = 0$  par composition des limites.  
Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  et  $f$  est bien continue en 0.

Si l'énoncé le suggère, on pourra aussi étudier le prolongement par continuité de la fonction  $f$  en un point  $x_0 \notin \mathcal{D}_f$  qui est une borne du domaine de définition. Pour cela, on calcule  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  :

- Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , alors  $f$  est prolongeable par continuité en  $x_0$  en posant  $f(x_0) = \ell$ .
- Sinon,  $f$  n'est pas prolongeable par continuité en  $x_0$ .

On peut éventuellement prolonger  $f$  par continuité à gauche ou à droite si les limites sont différentes en  $x_0^-$  et  $x_0^+$ .

**Exercice.** La fonction  $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$  est-elle prolongeable par continuité en 0 ? en 1 ?

 **Correction.**

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0$  donc  $f$  est prolongeable en 0 en posant  $f(0) = 0$ .  
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln(x)} = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln(x)} = +\infty$  donc  $f$  n'est pas prolongeable en 1 (par contre,  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = 1$ ).

## Étude de la dérivabilité

Avant de dériver la fonction, on pensera systématiquement à préciser le **domaine de dérivabilité** : c'est le même que le domaine de continuité sauf s'il y a une **valeur absolue** ou une **racine carrée**. Dans ce cas, il faut supprimer les valeurs qui annulent la valeur absolue ou la racine carrée.

Si l'énoncé le demande, il faudra étudier la dérivabilité en un point  $x_0$  en dehors du domaine de dérivabilité où  $f$  est continue. Pour cela, on calcule la limite du **taux d'accroissement** en  $x_0$  :

- Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$ , alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = \ell$ .
- Sinon,  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0$ .

On peut éventuellement distinguer dérivabilité à gauche et à droite si les limites sont différentes en  $x_0^-$  et  $x_0^+$ .

**Exercice.** Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

 **Correction.**

Rappelons qu'une fonction qui n'est pas continue en un point ne peut pas être dérivable en ce point ! Ici, on a vu précédemment que  $f$  est continue en 0. Elle est donc peut-être dérivable en 0. Pour le savoir, on étudie le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} e^{-1/x^2} = \pm \sqrt{\frac{1}{x^2}} e^{-1/x^2} = \pm \frac{\sqrt{X}}{e^X} \quad \text{en posant } X = \frac{1}{x^2}.$$

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{X}}{e^X} = 0$  par croissance comparée.

Donc, par composition des limites,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ . Ainsi,  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .

### Calcul de la dérivée

Pour tout  $x$  dans le domaine de dérivabilité de  $f$ , on peut alors calculer  $f'(x)$ . Pour cela, rappelons les différentes formules à utiliser :

Fonction $f(x) = \dots$	Fonction dérivée $f'(x) = \dots$
constante	0
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$(u(x))^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u'(x)(u(x))^{\alpha-1}$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$\lambda u(x), \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$
$u(v(x))$	$v'(x)u'(v(x))$

On termine le calcul de la dérivée en **factorisant au maximum**.

### Tableau de variation

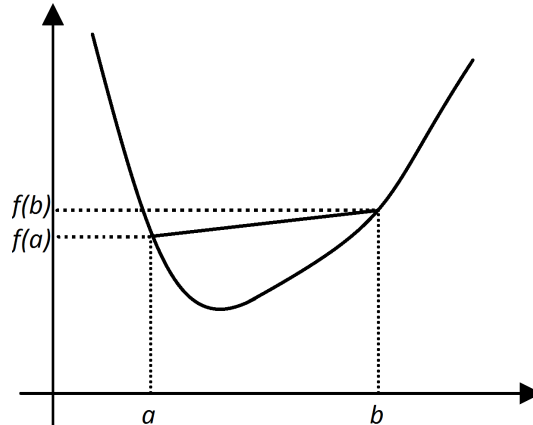
Dans un même tableau :

- On détermine le signe de  $f'(x)$  pour tout  $x$  dans le domaine de dérivabilité de  $f$ .
- On en déduit les variations de  $f$  sur son domaine de définition.
- On complète le tableau de variation avec les limites aux bornes du domaine de définition (et on vérifie que c'est bien cohérent avec les variations de  $f$ ).

## Convexité

Pour étudier la convexité de la fonction  $f$ , il faut calculer sa dérivée seconde  $f''$  (en justifiant avant que  $f'$  est continue et dérivable !) puis étudier son signe :

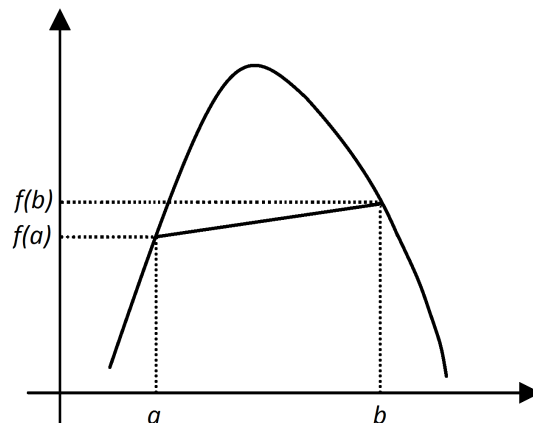
- Si  $f''(x) \geq 0$ ,  $f$  est **convexe**. Dans ce cas :
  - $\mathcal{C}_f$  est toujours en dessous de ses cordes :



$$\forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

- $\mathcal{C}_f$  est toujours au dessus de ses tangentes.

- Si  $f'' \leq 0$ ,  $f$  est **concave**. Dans ce cas :
  - $\mathcal{C}_f$  est toujours au dessus de ses cordes :



$$\forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

- $\mathcal{C}_f$  est toujours en dessous de ses tangentes.

- Si  $f''$  s'annule et change de signe en  $a$ ,  $\mathcal{C}_f$  admet un **point d'inflexion**  $A = (a, f(a))$  (qui caractérise un changement de convexité). Dans ce cas,  $\mathcal{C}_f$  traverse sa tangente  $T_A$  en  $A$  d'équation :

$$T_A : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

## Tracé de la courbe représentative

On termine l'étude en traçant la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction (si l'énoncé le demande) :

- On commence par placer les différents points remarquables de la courbe (maximum, minimum, points d'intersections avec les axes, points d'inflexions...).
- On trace les tangentes en ces points.
- On trace les éventuelles asymptotes horizontales, verticales, obliques.
- On trace enfin  $\mathcal{C}_f$  (en faisant attention à respecter la parité, la convexité...).

### 3.3 Bijection et bijection réciproque

#### Définition.

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $J$ . La fonction  $f$  est une **bijection** de  $I$  dans  $J$  lorsque tout élément  $y \in J$  possède **un unique antécédent**  $x \in I$  par  $f$ . Autrement dit :

$$\forall y \in J, \exists ! x \in I, y = f(x).$$

Pour démontrer qu'une application est bijective, on utilisera en général le :

#### Théorème 17 (de la bijection)

Soit  $f$  est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Alors  $J = f(I)$  est un intervalle et  $f$  réalise une **bijection** de  $I$  dans  $J$ .

#### Méthode.

Pour montrer qu'une équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in I$  (qu'on ne cherche pas à expliciter) :

1. On démontre que  $f$  réalise une bijection de  $I$  dans un intervalle  $J$  à l'aide du théorème de la bijection.
2. On vérifie que  $0 \in J$ . Dans ce cas,  $0$  admet un unique antécédent  $\alpha \in I$  par la bijection  $f$ . Ce qui démontre que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in I$ .

#### Exercice.

1. Montrer que l'équation  $x^2 = 3 - \ln(x)$  admet une unique solution  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ .

#### Correction.

Comme  $x^2 = 3 - \ln(x) \Leftrightarrow x^2 - 3 + \ln(x) = 0$ , on pose  $f(x) = x^2 - 3 + \ln(x)$ .  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et on a :

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x} > 0.$$

On obtient le tableau de variation suivant :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Ainsi,  $f$  est continue et strictement croissant de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$ . Par le théorème de la bijection,  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$ .

Comme  $0 \in \mathbb{R}$  (intervalle d'arrivée de  $f$ ),  $0$  admet un unique antécédent  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  (intervalle de départ de  $f$ ). Autrement dit, l'équation

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 - \ln(x)$$

admet une unique solution  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ .

2. Montrer que  $\alpha \in ]1, 2[$ .



**Correction.**

Question classique et méthode à retenir ! On classe les images et on revient aux antécédents en utilisant les variations de  $f$ .

Comme  $f(1) = -2$ ,  $f(\alpha) = 0$  et  $f(2) = 1 + \ln(2)$ , on a  $f(1) < f(\alpha) < f(2)$ .

Comme  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on en déduit que  $1 < \alpha < 2$ , c'est-à-dire  $\alpha \in ]1, 2[$ .

**Définition.**

Soit  $f$  une bijection d'un intervalle  $I$  dans  $J = f(I)$ .

On appelle alors **bijection réciproque** de  $f$  la fonction notée  $f^{-1}$  définie par :

$$f^{-1} : \begin{cases} J & \rightarrow & I \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédant de } y \text{ par } f \end{cases}$$

Ainsi, on a pour tout  $x \in I$  et  $y \in J$  :

$$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

**Propriété 18 (Bijection et bijection réciproque)**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , **continue** et **strictement monotone**. Alors  $f$  réalise une **bijection** de  $I$  dans  $J = f(I)$ , et sa **bijection réciproque** vérifie :

(1) Pour tout  $x \in I$  et  $y \in J$ ,

$$f^{-1} \circ f(x) = x \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1}(y) = y.$$

En particulier,  $f^{-1}$  réalise une **bijection** de  $J$  sur  $I$ .

(2) Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$  sont **symétriques par rapport à la première bissectrice du plan d'équation  $y = x$** .

(3)  $f^{-1}$  est elle-même **continue** sur  $J$ , **strictement monotone** et de **même sens de variation** que  $f$ .

(4) Si  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b} f^{-1}(x) = a.$$

(5) Si  $f$  est **dérivable** sur  $I$  et si  $f'$  **ne s'annule pas** sur  $I$ , alors  $f^{-1}$  est **dérivable** sur  $J$  et

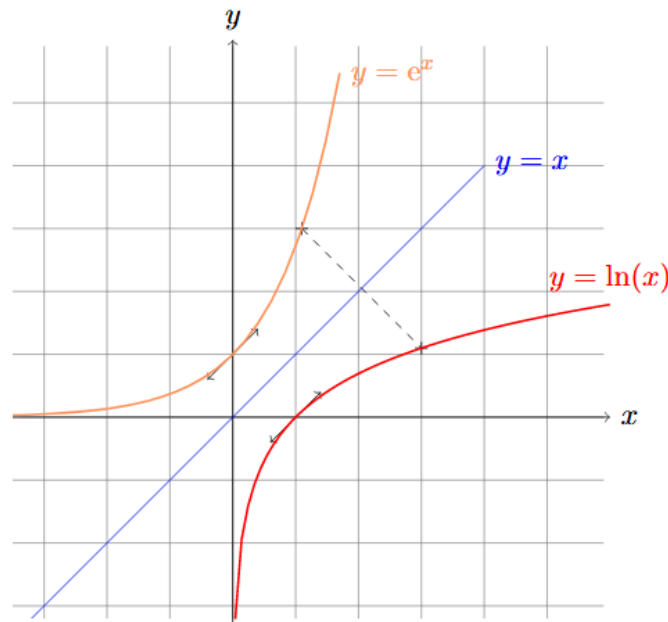
$$\forall y \in J, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

**Exemple.** Les fonctions  $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  sont **bijections réciproques** l'une de l'autre :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exp \circ \ln(x) = \exp(\ln(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \ln \circ \exp(y) = \ln(\exp(y)) = y.$$



Ceci se remarque aussi graphiquement puisque les courbes représentatives de  $\ln$  et de  $\exp$  sont symétriques par rapport à la droite  $y = x$  :



### Méthode.

Pour démontrer qu'une fonction  $f : I \rightarrow J$  est bijective et obtenir sa bijection réciproque  $f^{-1} : J \rightarrow I$ , deux possibilités :

- Si on nous donne l'expression de la bijection réciproque, il suffit de vérifier que :

$$\forall x \in I, f^{-1} \circ f(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in J, f \circ f^{-1}(y) = y$$

- Sinon, on résout l'équation  $y = f(x)$  (d'inconnue  $x$ ) et on montre qu'elle possède une unique solution qui est  $x = f^{-1}(y)$ .

### Exercices.

1. On considère les fonctions suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & ]0, 1[ \\ x & \mapsto & \frac{1}{e^x + 1} \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} ]0, 1[ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \ln\left(\frac{1-y}{y}\right) \end{cases}$$

Démontrer que  $f$  et  $g$  sont bijections réciproques l'une de l'autre.

### Correction.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g\left(\frac{1}{e^x + 1}\right) = \ln\left(\frac{1 - \frac{1}{e^x + 1}}{\frac{1}{e^x + 1}}\right) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1} \times \frac{e^x + 1}{1}\right) = \ln(e^x) = x. \end{aligned}$$

Pour tout  $y \in ]0, 1[$ ,

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = f\left(\ln\left(\frac{1-y}{y}\right)\right) = \frac{1}{\frac{1-y}{y} + 1} = \frac{1}{\frac{1-y+y}{y}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y.$$

Donc  $f$  et  $g$  sont bijections réciproques l'une de l'autre.

2. On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f : \begin{cases} ]-1, 1[ & \rightarrow & ]0, +\infty[ \\ x & \mapsto & \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est bijective et déterminer sa bijection réciproque.



**Correction.**

Soit  $y \in ]0, +\infty[$ . On résout l'équation  $y = f(x)$  d'inconnue  $x \in ]-1, 1[$ . Si cette équation admet une unique solution, alors  $f$  est bijective et on obtiendra une forme explicite de  $f^{-1}$ .

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \\ &\Leftrightarrow y^2 = \frac{1+x}{1-x} \\ &\Leftrightarrow x + xy^2 = y^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} \end{aligned}$$

L'équation  $y = f(x)$  admet une unique solution  $x = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}$ . Donc  $f$  est bijective et admet pour bijection réciproque :

$$f^{-1} : \begin{cases} ]0, +\infty[ & \rightarrow & ]-1, 1[ \\ y & \mapsto & \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} \end{cases}$$