Chapitre 0

Révisions de première année

Consignes

On reprend dans ce chapitre certains résultats du programme d'ECG1 sur les sommes et produits, les suites réelles et les fonctions réelles d'une variable réelle. Rien de nouveau donc, mais il est essentiel de s'assurer que tous les résultats de ce chapitre sont connus, et de combler vos lacunes éventuelles dès maintenant. Ce travail est à faire avec le plus grand sérieux avant la rentrée. C'est votre dernière occasion de vous mettre à jour sur ces notions.

Il y aura à la rentrée une interrogation de cours sur ce chapitre. Les premières colles et le DS 1 porteront également sur ce chapitre.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECG au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Sommes et produits

Compétences attendues.

- ✓ Calculer une somme ou un produit à l'aide des formules sur les sommes usuelles ou par télescopage.
- ✓ Connaître la formule explicite et les relations sur les coefficients binomiaux et en déduire la construction du triangle de Pascal.
- ✓ Connaître la formule du binôme de Newton et savoir l'utiliser pour développer une expression ou calculer une somme.
- ✓ Savoir utiliser les formules d'interversion sur les sommes doubles pour les calculer.

À vous de vous assurer, à l'issue de chaque chapitre, que ces compétences sont bien acquises !

1.1 Sommes

Définition.

Soient $p \leq n$ deux entiers naturels et $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n$ des réels. La somme de k allant de p à n des x_k est notée :

$$\sum_{k=p}^{n} x_k = x_p + x_{p+1} + \ldots + x_{n-1} + x_n.$$

Rappelons les seules opérations autorisées sur les sommes :

- On peut séparer la somme d'une somme en deux :
$$\sum_{k=0}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=0}^{n} y_k.$$
- On peut factorisation par un réel λ qui ne dépend pas de l'indice :
$$\sum_{k=0}^{n} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} x_k.$$
- On a enfin la relation de Chasles (où $p \leq m \leq n$) :
$$\sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{k=p}^{m} x_k + \sum_{k=m+1}^{n} x_k.$$

Théorème 1 (Sommes usuelles)

Soit $n, p \in \mathbb{N}$, avec $p \leq n$.

(1) Somme d'une constante a (indépendante de l'indice de sommation k) :

$$\sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1) \times a.$$

(2) Sommes des premières puissances des n premiers entiers naturels :

$$(i) \quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad (ii) \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad (iii) \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(3) Somme géométrique (avec $q \in \mathbb{R}^*$) :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \begin{cases} n-p+1 & \text{si } q = 1, \\ q^p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1. \end{cases}$$

Pour calculer une somme $\sum_{k=p}^{n} x_k$, on pourra :

- Utiliser les formules sur les sommes usuelles (si le terme général x_k est une combinaison linéaire de constantes, k, k^2, k^3, q^k) :

  Exercice. Calculer $\sum_{k=2}^{n}(k^2 - 3 \times 2^k)$.

  Correction.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}(k^2-3\times 2^k) &= \sum_{k=2}^{n} k^2 - 3\sum_{k=2}^{n} 2^k = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 1^2 - 3\sum_{k=2}^{n} 2^k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 - 3\times 2^2 \times \frac{1-2^{n-2+1}}{1-2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 11 - 3\times 2^{n+1}.\end{aligned}$$

- Faire du télescopage (si le terme général x_k peut s'écrire sous la forme $u_{k+1} - u_k$ ou $u_k - u_{k+1}$) :

  Exercice. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

  Correction.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

- Faire un changement de variable (si les simplifications pour le télescopage sont trop compliquées) :

  Exercice. Calculer $\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$.

  Correction.
  En posant $i = k-1$ et $j = k+1$ à la deuxième égalité :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} - \sum_{j=3}^{n+1} \frac{1}{j} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cancel{\sum_{i=3}^{n-1} \frac{1}{i}}\right) - \left(\cancel{\sum_{j=3}^{n-1} \frac{1}{j}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

1.2 Produits

Définition.

Soient $p \leq n$ deux entiers naturels et $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n$ des réels. Le produit de k allant de p à n des x_k est notée :

$$\prod_{k=p}^{n} x_k = x_p \times x_{p+1} \times \ldots \times x_{n-1} \times x_n.$$

Rappelons les seules opérations autorisées sur les produits :

- On peut séparer le produit d'un produit en deux :

$$\prod_{k=0}^{n}(x_k \times y_k) = \left(\prod_{k=0}^{n} x_k\right) \times \left(\prod_{k=0}^{n} y_k\right).$$

- Le produit d'un quotient est égal au quotient des produits :

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{x_k}{y_k} = \frac{\prod_{k=0}^{n} x_k}{\prod_{k=0}^{n} y_k}.$$

- La relation de Chasles s'applique également pour les produits (où $p \leq m \leq n$) :

$$\prod_{k=0}^{n} x_k = \left(\prod_{k=0}^{m} x_k\right) \times \left(\prod_{k=m+1}^{n} x_k\right)$$

Pour calculer un produit, on pourra :

- Se ramener à une somme avec l'une des formules suivantes :

$$\prod a^{x_k} = a^{\sum x_k}, \qquad \prod \exp(x_k) = \exp\left(\sum x_k\right), \qquad \ln\left(\prod x_k\right) = \sum \ln(x_k).$$

Exercice. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{3}{4^k}$.

Correction.

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{3}{4^k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} 3}{\prod_{k=1}^{n} 4^k} = \frac{3^{\sum_{k=1}^{n} 1}}{4^{\sum_{k=1}^{n} k}} = \frac{3^n}{4^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{3^n}{2^{n(n+1)}}.$$

- Faire du télescopage (si le terme général x_k peut s'écrire sous la forme $\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$ ou $\dfrac{u_k}{u_{k+1}}$) :

Exercice. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Correction.

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{\cancel{2}}{1} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times \ldots \times \frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}} \times \frac{n+1}{\cancel{n}} = n+1.$$

1.3 Formule du binôme

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **factorielle** n et on note $n!$ l'entier défini par $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$.

Remarque. On a $0! = 1$ et si $n \geq 1$, $n! = n \times (n-1)!$.

Définition.

Soient n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$. On appelle **coefficient binomial** "k parmi n" la quantité :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Rappel. L'entier $\binom{n}{k}$ représente :

- le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments ;
- le nombre de façons de choisir k objets parmi n objets sans répétition et sans ordre.

Propriété 2 (Relations sur les coefficients binomiaux)

Soit n un entier naturel non nul.

(1) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie des coefficients binomiaux).

(2) Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (formule du triangle de Pascal).

Remarque. Cette dernière relation nous permet de construire le **triangle de Pascal**, qui nous donne une construction rapide des premiers coefficients binomiaux :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$\dots$	k	$k+1$	$\dots$	n	$n+1$
$n=0$	1										
$n=1$	1	1									
$n=2$	1	2	1								
$n=3$	1	3	3	1							
$n=4$	1	4	6	4	1						
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$									
n	1	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$		$\dots$		$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$	$\dots$	1	
$n+1$	1	$\binom{n+1}{1}$	$\binom{n+1}{2}$		$\dots$			$\binom{n+1}{k+1}$		$\dots$	1

Théorème 3 (Formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux nombres réels et n un entier naturel. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

La formule du binôme de Newton permet de :

- Développer une expression du type $(a+b)^n$:

  Exercice. Développer $(x-2)^4$.

  Correction.

$$\begin{aligned}
(x-2)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^k (-2)^{4-k} \\
&= \binom{4}{0} x^0 (-2)^{4-0} + \binom{4}{1} x^1 (-2)^{4-1} + \binom{4}{2} x^2 (-2)^{4-2} + \binom{4}{3} x^3 (-2)^{4-3} + \binom{4}{4} x^4 (-2)^{4-4} \\
&= (-2)^4 + 4 \times x \times (-2)^3 + 6 \times x^2 \times (-2)^2 + 4 \times x^3 \times (-2) + x^4 \\
&= 16 - 32x + 24x^2 - 8x + x^4.
\end{aligned}$$

- Calculer une somme (s'il y a un coefficient binomiale dans l'expression de son terme général) :

  Exercice. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}$.

  ✎ **Correction.**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\frac{n!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1} 2^{l}\binom{n+1}{l} \quad \text{(en posant } l=k+1\text{)} \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}2^{l}1^{n+1-l} - 1\right) = \frac{1}{n+1}(3^{n+1}-1).
\end{aligned}$$

1.4 Sommes doubles

Sommes doubles à indices indépendants

On considère des réels $x_{i,j}$ avec $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,m]\!]$ dont on cherche à calculer la somme notée $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} x_{i,j}$.

Propriété 4 (Interversion de sommes à indices indépendants)

On a les égalités suivantes :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}\right).$$

Exemple. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{i}{2^j}$.

✎ **Correction.**

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{i}{2^j} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} i\times\left(\frac{1}{2}\right)^j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^j\times\frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{n(n+1)}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{n(n+1)}{2}\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

Sommes doubles à indices dépendants

On suppose à présent que $n=m$, et on souhaite calculer :

- $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_{i,j}$: somme de tous les termes $x_{i,j}$ dont les indices i et j vérifient $1\leq i\leq j\leq n$.
- $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} x_{i,j}$: somme de tous les termes $x_{i,j}$ dont les indices i et j vérifient $1\leq i<j\leq n$.

Propriété 5 (Interversion de sommes à indices dépendants)

On a les égalités suivantes :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} x_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} x_{i,j}\right)$$

$$\sum_{1\leq i< j\leq n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j}\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j}\right)$$

Méthode.
Ces égalités ne sont pas à apprendre par cœur. Il faudra les retrouver en pratique en procédant ainsi :

- *On choisit la variable sur laquelle on somme en premier, par exemple i. On écrit alors les sommes sans les bornes :* $\displaystyle\sum_{i=}\left(\sum_{j=}\right)$.
- *On détermine les bornes de la somme* $\displaystyle\sum_{i=}$ *en regardant l'intervalle d'entiers parcouru par i. Ces bornes ne doivent pas dépendre de j.*
- *On détermine enfin les bornes de la deuxième somme* $\displaystyle\sum_{j=}$ *de la manière suivante : à i fixé, on regarde l'intervalle d'entiers parcouru par j. Cet intervalle dépend de i.*

Exercice. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{i^3}{j(j+1)}$.

Correction.

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{i^3}{j(j+1)} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{i^3}{j(j+1)}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)}\left(\sum_{i=1}^{j} i^3\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)}\times\frac{j^2(j+1)^2}{4}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{4} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} + \frac{n(n+1)}{8}.\end{aligned}$$

2 Suites réelles

Compétences attendues.

- ✓ Savoir identifier et déterminer l'expression explicite d'une suite géométrique, arithmétique, arithmético-géométrique et d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
- ✓ Calculer la limite d'une suite sous forme explicite, en levant une forme indéterminée si nécessaire.
- ✓ Connaître les différents théorèmes de convergence sur les suites et savoir les appliquer correctement.

2.1 Suites usuelles

Propriété 6 (Suites arithmétiques, suites géométriques)

- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite **arithmétique** lorsqu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

Forme explicite : Pour tout $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$.

- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite **géométrique** lorsqu'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

Forme explicite : Pour tout $n \geq n_0$, $u_n = q^{n-n_0}u_{n_0}$.

Définition.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

Méthode.

Pour obtenir la forme explicite d'une suite arithmético-géométrique (u_n), on procèdera comme suit :

1. *On cherche l'unique solution x_0 de l'équation au point fixe : $x = ax + b$.*
2. *On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - x_0$ et on démontre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.*
3. *On donne la forme explicite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice. Déterminer la forme explicite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -u_n + 4.$$

Correction.

On est ici dans le cas d'une suite arithmético-géométrique. On en cherche donc le point fixe :

$$x_0 = -x_0 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 2.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$. Alors :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -u_n + 4 - 2 = -u_n + 2 = -(u_n - 2) = -v_n.$$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison (-1). On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (-1)^n v_0 = (-1)^n(1 - 2) = (-1)^{n+1}$$

et donc la forme explicite de (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + x_0 = (-1)^{n+1} + 2.$$

Propriété 7 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2)

Une suite (u_n) est **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Forme explicite : On résout l'équation caractéristique $x^2 = ax + b$.

- S'il y a deux solutions distinctes x_1 et x_2, alors il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n.$$

- S'il y a une unique solution x_0, alors il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)x_0^n$$

Pour déterminer λ et μ, on utilise deux termes de la suite (habituellement u_0 et u_1).

Exercice. Déterminer la forme explicite de la suite (u_n) (appelée suite de Fibonacci) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Correction.

Remarquons tout d'abord qu'il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On résout son équation caractéristique :

$$x^2 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0.$$

Posons $P(x) = x^2 - x - 1$. P admet deux racines réelles distinctes $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. D'après la propriété précédent, il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$$

Les cas $n = 0$ et $n = 1$ conduisent à résoudre le système (E) : $\left\{ \begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1 \end{array} \right.$.

On a :

$$(E) \iff \left\{ \begin{array}{l} \mu = -\lambda \\ \lambda(r_1 - r_2) = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right.$$

D'où finalement : $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

2.2 Convergence des suites réelles

Définition.

- On dit que (u_n) **converge vers** $\ell \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux, ce qui s'écrit en termes quantifiés :

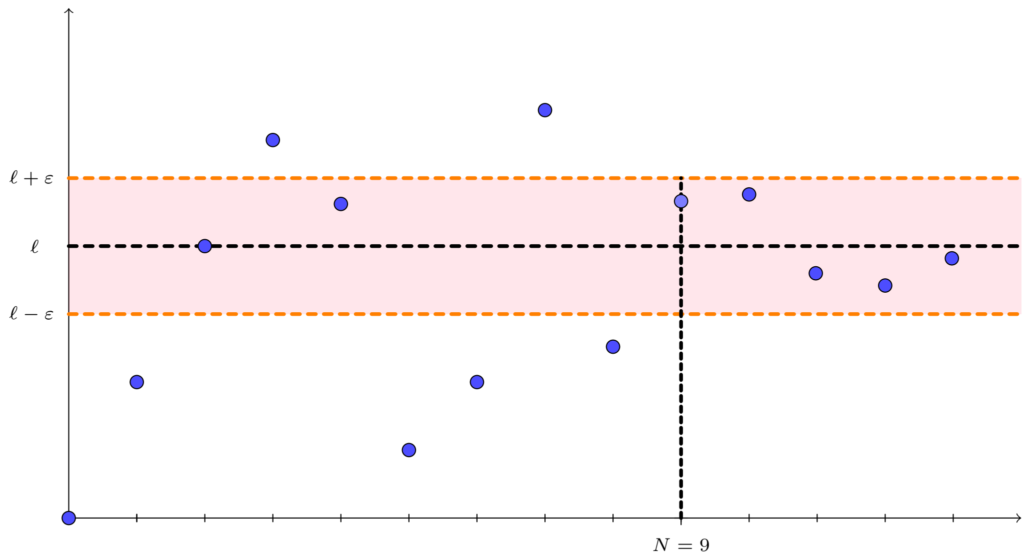
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq N \ \Rightarrow \ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

- On dit que (u_n) **diverge vers** $+\infty$ si pour tout réel a, les u_n sont strictement plus grand que a pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux, ce qui s'écrit en termes quantifiés :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq N \ \Rightarrow \ u_n > a.$$

- On dit que (u_n) **diverge vers** $-\infty$ si pour tout réel b, les u_n sont strictement plus petit que b pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux, ce qui s'écrit en termes quantifiés :

$$\forall b \in \mathbb{R}, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq N \ \Rightarrow \ u_n < b.$$



Convergence de la suite (u_n) vers ℓ : pour tout $n \geq N$, u_n est dans la "bande" $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.

Théorème 8 (Limites usuelles)

(1) Pour tout réel $\alpha > 0$, $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$.

(2) Pour tout réel $q \in]-1,1[$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Pour tout réel $q > 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

(3) Pour tout réel $\alpha > 0$, $\lim_{n\to+\infty} e^{\alpha n} = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} (\ln(n))^\alpha = +\infty$.

Méthode.

Pour calculer la limite d'une suite (u_n) donnée sous forme explicite, on détermine la limite de chacun des termes apparaissant dans l'expression de la suite puis :

- *Si on obtient aucune **forme indéterminée** $\infty-\infty$, $0\times(\pm\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ou $\dfrac{0}{0}$:*

  On peut alors calculer directement la limite de la suite à l'aide des opérations sur les limites.

- *Si on obtient une **forme indéterminée** :*

  On transforme l'expression de la suite pour lever l'indétermination. Plus précisément :

  – *Dans le cas $\infty-\infty$: on factorisera par le terme dominant ou on multipliera par la quantité conjuguée (s'il y a des racines carrées).*

  – *Dans les cas $0\times(\pm\infty)$ et $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$: on factorisera par le terme dominant puis on utilisera si nécessaire les **croissances comparées** (rappelons que l'exponentielle l'emporte sur la puissance, qui l'emporte sur le logarithme).*

  – *Dans le cas $\dfrac{0}{0}$: on factorisera l'expression ou on multipliera par la quantité conjuguée (s'il y a des racines carrées).*

  On calcule ensuite la limite de la suite à l'aide des opérations sur les limites.

2.3 Théorèmes de convergence

Lorsqu'on suppose que (u_n) est convergente

Propriété 9 (Limite des sous-suites d'une suite convergente)

Si la suite (u_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors pour toute fonction strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la suite $(u_{\varphi(n)})$ tend vers la même limite ℓ.

Exemple. Si (u_n) converge vers 3, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n+1} = 3$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n^2} = 3$...

Théorème 10 (Passage à la limite dans les inégalités larges)

On considère deux suites **convergentes** (u_n) et (v_n) et deux nombres réels m et M.

(1) Si $u_n \leq M$ à partir d'un certain rang n_0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq M$.

(2) Si $u_n \geq m$ à partir d'un certain rang n_0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq m$.

(3) Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Attention.
Ce théorème n'est pas valable si les inégalités sont strictes. Par exemple,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} > 0 \quad \not\Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} > 0.$$

Il faut retenir que le passage à la limite dans les inégalités transforme les inégalités (strictes et larges) en inégalités larges :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \geq 0.$$

Lorsqu'on veut prouver la convergence de (u_n)

Propriété 11 (Limites des termes pairs et impairs)

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent **vers la même limite** ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Remarque. Par contre, si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne convergent pas vers la même limite, alors la suite (u_n) ne converge pas (en appliquant la contraposée de la propriété 1).

Théorème 12 (d'encadrement)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que :

$$u_n \leq v_n \leq w_n \quad \text{à partir d'un certain rang } n_0.$$

Si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ, alors (v_n) converge aussi vers ℓ.

Théorème 13 (Technique de majoration ou de minoration)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$u_n \leq v_n \quad \text{à partir d'un certain rang } n_0.$$

(1) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors (v_n) est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(2) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors (u_n) est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 14 (des suites monotones)

(1) Toute suite **croissante** et **majorée** (par une **constante** M) est **convergente**.
Toute suite **croissante** et **non majorée** diverge vers $+\infty$.

(2) Toute suite **décroissante** et **minorée** (par une **constante** m) est **convergente**.
Toute suite **décroissante** et **non minorée** diverge vers $-\infty$.

Attention.

- Le majorant M et le minorant m sont des constantes, elles ne doivent donc pas dépendre de n !
- La suite ne tend pas forcément vers le majorant M ou le minorant m. Ce théorème prouve l'existence d'une limite ℓ, mais sans donner sa valeur !

Définition.

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** lorsqu'elles vérifient les trois hypothèses suivantes :

(1) (u_n) est croissante, (2) (v_n) est décroissante, (3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème 15 (des suites adjacentes)

Soient (u_n) et (v_n) deux **suites adjacentes** telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante. Alors, (u_n) et (v_n) **convergent vers une même limite** $\ell \in \mathbb{R}$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

3 Fonctions réelles d'une variable réelle

Compétences attendues.

✓ Factoriser un polynôme ou une fonction rationnelle à l'aide d'une division euclidienne ou par identification.

✓ Décomposer en éléments simples une fonction rationnelle.

✓ Connaître les propriétés de la valeur absolue, de la partie entière, de la racine carrée.

✓ Connaître les propriétés algébriques des fonctions logarithme et exponentielle.

✓ Connaître les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions usuelles, les limites et savoir tracer leurs courbes représentatives.

✓ Étudier la parité d'une fonction.

✓ Calculer la limite d'une fonction, en levant une forme indéterminée si nécessaire.

✓ Interpréter les limites d'une fonction en terme d'asymptotes verticales ou horizontales ou de prolongement par continuité.

✓ Démontrer que la courbe représentative d'une fonction admet une asymptote oblique et déterminer la position relative de la courbe et de son asymptote.

✓ Déterminer le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité d'une fonction et calculer sa dérivée.

✓ Étudier la continuité et la dérivabilité d'une fonction en un point.

✓ Étudier la convexité d'une fonction et connaître ses différentes caractérisations.

✓ Prouver qu'une fonction est bijective à l'aide du théorème de la bijection.

✓ Déterminer la bijection réciproque d'une fonction bijective.

3.1 Fonctions usuelles

Fonctions polynômiales

Définition.

- On dit qu'une fonction P est une **fonction polynômiale** ou un **polynôme** s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}$) tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n.$$

- Si $a_n \neq 0$, l'entier n est le **degré** de P noté $\deg(P)$ et a_n est le **coefficient dominant** de P.
  Par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$.
- Les **fonctions polynômiales** sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Propriété 16 (Degré et opérations sur les polynômes)

(1) L'addition de polynômes, la multiplication d'un polynôme par un réel, la multiplication de polynômes et la dérivée d'un polynôme sont des polynômes.

(2) Si P et Q sont deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors :

- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$;
- $\deg(\lambda.P) = \deg(P)$;
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$;
- si $P \neq 0$, $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

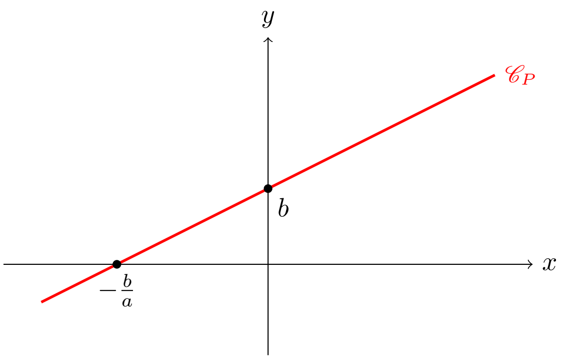
Propriété 17 (d'un polynôme du premier degré)

Soient a, b deux réels, $a \neq 0$, et $P(x) = ax + b$ un polynôme du premier degré.
Alors P admet **une unique racine** égale à $-\dfrac{b}{a}$ et on a le tableau de signe suivant :

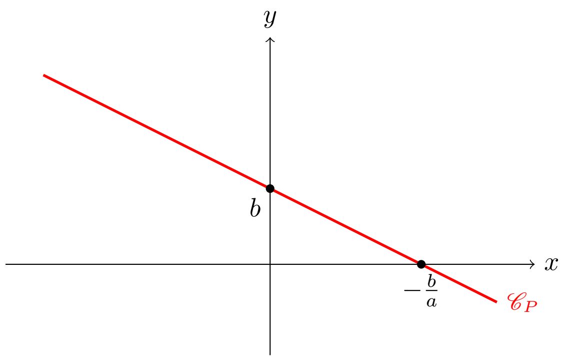
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$P(x)$		signe de $-a$	0	signe de a	

Représentation graphique. $P(x) = ax + b$ est une fonction affine. Elle est représentée graphiquement par une droite dont le coefficient directeur est a et l'ordonnée à l'origine est b.
La racine $-\frac{b}{a}$ correspondent à l'abscisse du point d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses.

Cas où $a > 0$:



Cas où $a < 0$:



Propriété 18 (d'un polynôme du second degré)

Soient a, b, c trois réels, $a \neq 0$, et $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.
On appelle **discriminant** du polynôme P le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$. Alors :

- Si $\Delta > 0$, P admet **deux racines distinctes** $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et on a la factorisation suivante :
$$P(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$
On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, P admet **une unique racine double** $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et on a la factorisation suivante :
$$P(x) = a\,(x - x_0)^2\,.$$
On en déduit le tableau de signe suivant :

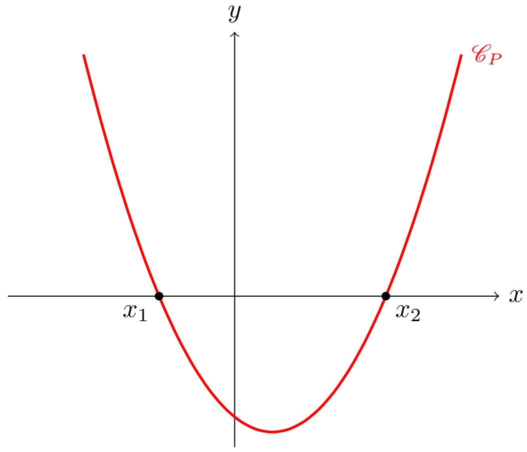
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta < 0$, P admet **aucune racine** et il ne peut pas être factorisé. En particulier, $P(x)$ est non nul pour tout $x \in \mathbb{R}$ et du signe du coefficient a :

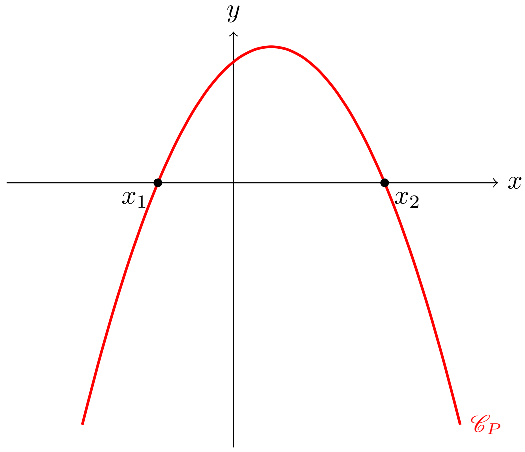
x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

Représentation graphique. La représentation graphique de $P(x) = ax^2 + bx + c$ est une **parabole** dont l'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = -\frac{b}{2a}$. La parabole est tournée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$.
Les racines éventuelles correspondent aux abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

Cas où $a > 0$:



Cas où $a < 0$:



Propriété 19 (Relations coefficients/racines d'un polynôme du second degré)

Soient a, b, c trois réels, $a \neq 0$, et $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.
En notant x_1 et x_2 les racines, distinctes ou non, de P, on a :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Il sera souvent utile d'écrire un polynôme sous forme **factorisée**, c'est-à-dire comme produit de polynômes de degré 1 ou de polynômes de degré 2 sans racine.

Méthode.

Pour factoriser un polynôme P,

1. *On cherche une racine évidente, c'est-à-dire un réel a tel que $P(a) = 0$.*
2. *Dans ce cas, il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-a)Q(x)$. Pour déterminer Q, on a deux options :*
   - *Soit poser la division euclidienne de P par $(x-a)$.*
   - *Soit écrire $P(x) = (x-a)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1})$, développer le second membre et identifier les coefficients.*
3. *On poursuit en factorisant Q et ainsi de suite jusqu'à obtenir un polynôme de degré 2 qu'on factorise en calculant son déterminant.*

Exercice. Factoriser le polynôme $P(x) = 6x^3 + x^2 - 4x + 1$.

Correction.

$P(-1) = 6(-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) + 1 = -6 + 1 + 4 + 1 = 0$ donc -1 est racine de P et on effectue la division euclidienne de P par $x + 1$:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & 6x^3 & + & x^2 & - & 4x & + & 1 & & x+1 \\ \cline{10-10}
- & (6x^3 & + & 6x^2) & & & & & & 6x^2-5x+1 \\ \cline{1-9}
 & & - & 5x^2 & - & 4x & + & 1 & & \\
 & & - & (-5x^2 & - & 5x) & & & & \\ \cline{3-9}
 & & & & & x & + & 1 & & \\
 & & & & - & (x & + & 1) & & \\ \cline{5-9}
 & & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Ainsi, $P(x) = (x + 1)Q(x)$ avec $Q(x) = 6x^2 - 5x + 1$.
Il reste à factoriser Q en calculant son discriminant. $\Delta = 1 > 0$ donc Q admet deux racines :

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{12} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{12} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit la factorisation de Q : $Q(x) = 6(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2}) = (3x - 1)(2x - 1)$.

On a alors : $P(x) = (x + 1)Q(x) = (x + 1)(3x - 1)(2x - 1)$.

Fonctions rationnelles

Définition.

On appelle **fonction rationnelle** toute fonction R qui est le quotient de deux polynômes P et Q :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Les **fonctions rationnelles** sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ privé des racines du dénominateur.

Une fonction rationnelle peut s'écrire sous forme :

- **Factorisée** (avec éventuellement une mise au même dénominateur) :

  Méthode.

  Pour factoriser une fonction rationnelle,

  1. *On factorise les dénominateurs des fractions.*
  2. *On détermine le dénominateur commun : c'est le produit des facteurs aux dénominateurs en prenant pour chacun la puissance la plus élevée où il apparait.*
  3. *On met les fractions au même dénominateur.*
  4. *Pour finir, on développe puis on factorise le numérateur.*

  Exemple. Factoriser la fonction rationnelle $R(x) = \dfrac{2}{x^2 - 4} + \dfrac{x}{x^2 + 4x + 4}$.

  Correction.

$$\begin{aligned}
R(x) &= \frac{2}{x^2-4} + \frac{x}{x^2+4x+4} = \frac{2}{(x-2)(x+2)} + \frac{x}{(x+2)^2} \\
&= \frac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)^2} + \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)^2} = \frac{x^2+2}{(x-2)(x+2)^2}.
\end{aligned}$$

- **Développée** (en effectuant une décomposition en éléments simples) :

Méthode.

Pour développer une fonction rationnelle en une somme de fonctions rationnelles plus simples, on réduit la somme au même dénominateur, puis on procède par identification des coefficients des numérateurs.

Exemple. Déterminer les réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

Correction.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\begin{aligned} \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1)}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{(bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (b+c)x + (a+c)}{(x+1)(x^2+1)} \end{aligned}$$

Par identification :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcll} a & + & b & & & = & 0 & (L_1) \\ & & b & + & c & = & 0 & (L_2) \\ a & & & + & c & = & 2 & (L_3) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} a & + & b & & & = & 0 & (L_1) \\ & & b & + & c & = & 0 & (L_2) \\ & - & b & + & c & = & 2 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} a & + & b & & & = & 0 & (L_1) \\ & & b & + & c & = & 0 & (L_2) \\ & & & & 2c & = & 2 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & -1 \\ c & = & 1 \end{array} \right.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\dfrac{2}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{-x+1}{x^2+1}$.

Fonction valeur absolue

Définition.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x est le nombre réel, noté $|x|$, défini par :

$$|x| = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{array} \right.$$

La fonction **valeur absolue** $x \mapsto |x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Remarque. La valeur absolue peut être interprétée comme une distance :

$$|y - x| = d(x, y) = \text{distance entre } x \text{ et } y.$$

En particulier, on a les équivalences suivantes :

- $|x - a| \leq r \Leftrightarrow d(a, x) \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r, a + r]$,
- $|x - a| \geq r \Leftrightarrow d(a, x) \geq r \Leftrightarrow x \in]-\infty, a - r] \cup [a + r, +\infty[$.

On a les mêmes équivalences en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes et les intervalles fermés par des intervalles ouverts.

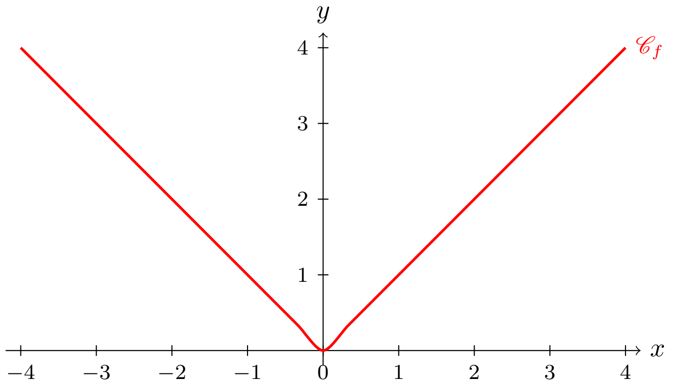
Propriété 20 (Valeur absolue d'un nombre réel)

(1) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).

(2) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x| \times |y| = |x \times y|$.

(3) Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$.

Représentation graphique. Voici la courbe représentative de la fonction valeur absolue :



Fonction partie entière

Définition.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La **partie entière** de x, noté $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier relatif qui est inférieur ou égal à x. Autrement dit, $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif qui vérifie :

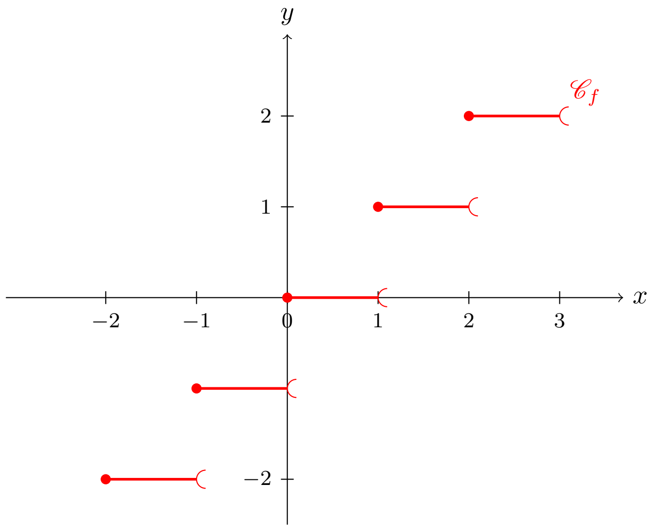
$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

La fonction **partie entière** $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (elle est discontinue en tous les points entiers).

Méthode.

Les inégalités $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ sont très utiles en pratique puisqu'elles permettent dans beaucoup de situations de se défaire de la partie entière. Il faut donc parfaitement les connaitre et penser à s'y ramener.

Représentation graphique. Voici la courbe représentative de la fonction partie entière :



Fonction racine carrée

Définition.

La fonction **racine carrée** est la fonction qui, à tout réel positif x, associe $\sqrt{x}$.
Elle est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété 21 (des racines carrées)

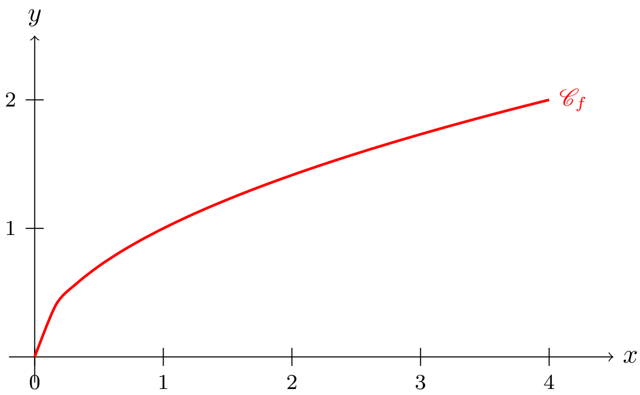
(1) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{x \times y}$.

(2) Pour tous $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

(3) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(\sqrt{x})^2 = x$.

(4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Représentation graphique. Voici la courbe représentative de la fonction racine carrée :



Fonctions logarithme et exponentielle

Définition.

- On appelle fonction **logarithme** l'unique fonction notée ln, définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, qui vérifie :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \ln(1) = 0.$$
- On appelle fonction **exponentielle** l'unique fonction notée exp, définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, qui vérifie :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x) \qquad \text{et} \qquad \exp(0) = 1.$$

Théorème 22 (Propriétés algébriques des fonctions logarithme et exponentielle)

Pour tous réels $x, y > 0$ et pour tout entier n,

(1) $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.

(2) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

(3) $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

(4) $\exp(\ln(x)) = x$.

Pour tous réels x, y et pour tout entier n,

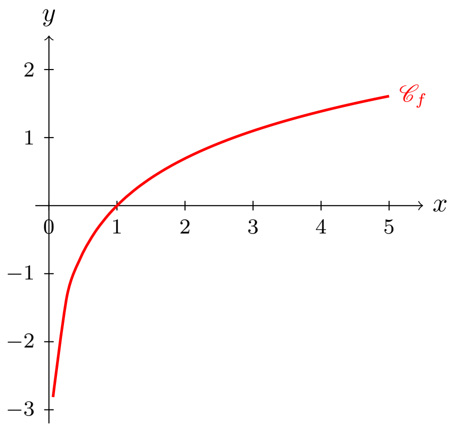
(6) $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

(7) $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

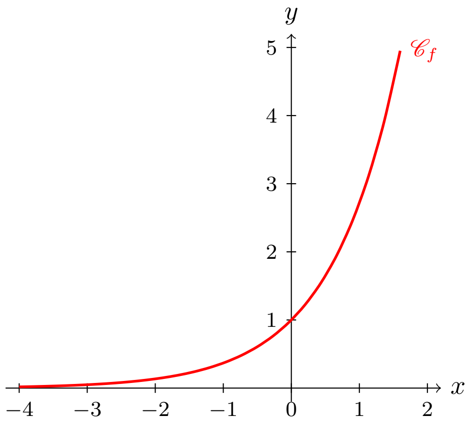
(8) $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

(9) $\ln(\exp(x)) = x$.

Représentation graphique. Voici les courbes représentatives des fonctions logarithme et exponentielle :



Fonction logarithme



Fonction exponentielle

Fonctions puissances

Définition.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle **fonction puissance** d'exposant α la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$$

Remarques.

1. Cette définition généralise celle des puissances entières lorsque $x > 0$.
2. Pour tout $x > 0$, $x^{1/2} = \sqrt{x}$.

Les propriétés des puissances réelles sont semblables à celles des puissances entières :

Propriété 23 (Puissance réelle d'un nombre réel strictement positif)

Soient α et β des réels quelconques. Alors :

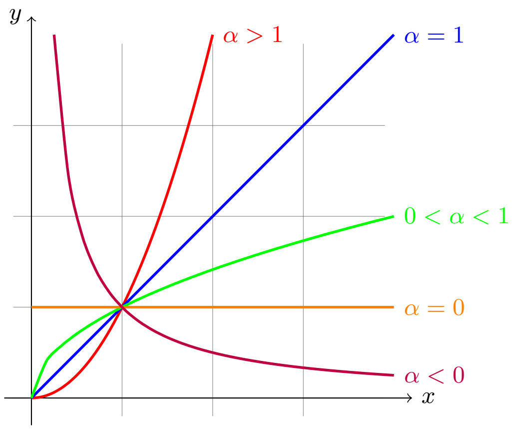
(1) Pour tout $x > 0$, $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$; $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$; $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\times\beta}$.

(2) Pour tout $x, y > 0$, $x^\alpha \times y^\alpha = (x \times y)^\alpha$; $\dfrac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha$.

(3) Pour tout $x > 0$, $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

(4) Pour tout réel x, $e^{\alpha x} = (e^x)^\alpha$.

Représentation graphique. Voici les différentes allures de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$:



3.2 Plan d'étude d'une fonction

Rappelons les différents points à traiter dans l'ordre lorsqu'il faut étudier une fonction f :

Pour les fonctions puissances

Dans le cas des fonctions puissances du type $x \mapsto (u(x))^\alpha$ (avec α non entier) ou $x \mapsto u(x)^{v(x)}$, on commencera **toujours** l'étude en les écrivant sous forme exponentielle :

$$(u(x))^\alpha = e^{\alpha \ln(u(x))} \qquad \text{ou} \qquad u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}.$$

Exemples. $x^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln(x)}$, $\ln(x)^x = e^{x\ln(\ln(x))}$.

Domaine de définition

On détermine le **domaine de définition** $\mathscr{D}_f$ de f à partir de l'expression de $f(x)$. S'il y a :

- Un dénominateur : il faut supprimer de $\mathscr{D}_f$ les racines de ce dénominateur.
- $\sqrt{u(x)}$: il faut résoudre l'inéquation $u(x) \geq 0$ et restreindre $\mathscr{D}_f$ à l'ensemble des solutions.
- $\ln(u(x))$: il faut résoudre l'inéquation $u(x) > 0$ et restreindre $\mathscr{D}_f$ à l'ensemble des solutions.

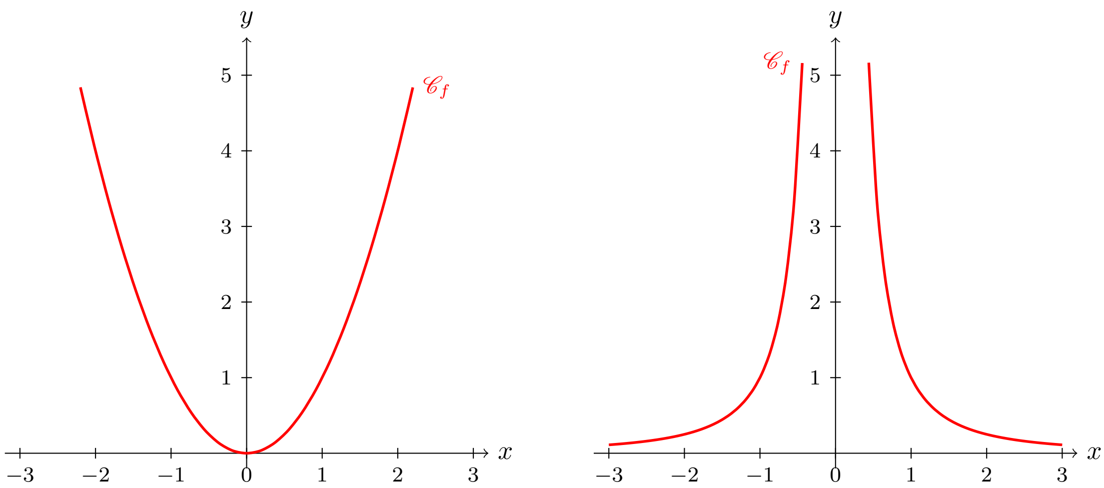
Parité (uniquement si l'énoncé le demande)

Pour étudier la parité de f, on procède en deux étapes :

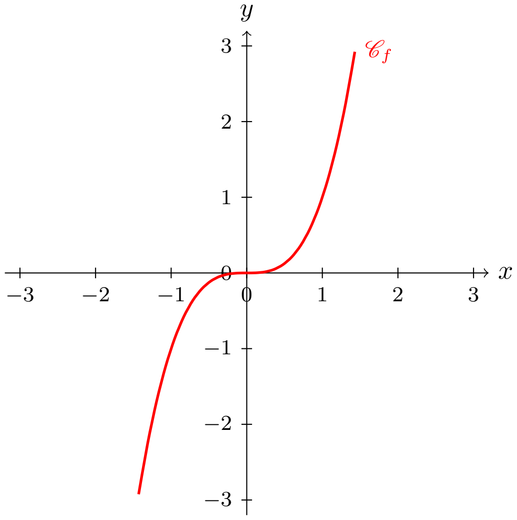
- On vérifie que $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 (il suffit de le constater).
- On exprime $f(-x)$ à l'aide de $f(x)$:
  - Si pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = f(x)$, alors f est **paire** et sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnée (Oy).
  - Si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$, alors f est **impaire** et sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère O.

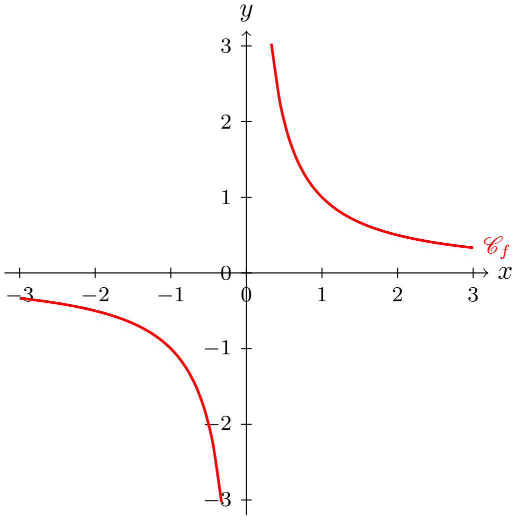
Exemples.

- Les fonctions du type $x \mapsto x^{2n}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n}}$ sont paires :



- Les fonctions du type $x \mapsto x^{2n+1}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n+1}}$ sont impaires :





Limites aux bornes du domaine de définition

Pour calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition $\mathscr{D}_f$, on détermine la limite de chacun des termes apparaissant dans l'expression de la fonction.

- Si on obtient aucune **forme indéterminée** $\infty - \infty$, $0 \times (\pm\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ou $\dfrac{0}{0}$:

  On peut alors calculer directement la limite de la fonction à l'aide des opérations sur les limites (en distinguant éventuellement limite à gauche et limite à droite).

- Si on obtient une **forme indéterminée** :

  On transforme l'expression de la fonction pour lever l'indétermination. Plus précisément :

  – Dans le cas $\infty - \infty$: on factorisera par le terme dominant ou on multipliera par la quantité conjuguée (s'il y a des racines carrées).

  – Dans les cas $0 \times (\pm\infty)$ et $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$: on factorisera par le terme dominant puis on utilisera si nécessaire les **croissances comparées** (rappelons que l'exponentielle l'emporte sur la puissance, qui l'emporte sur le logarithme).

  – Dans le cas $\dfrac{0}{0}$: on factorisera l'expression ou on multipliera par la quantité conjuguée (s'il y a des racines carrées).

  On calcule ensuite la limite de la fonction à l'aide des opérations sur les limites.

Asymptotes

Après avoir déterminer les limites aux bornes du domaine de définition, on précise s'il y a des asymptotes horizontales ou verticales à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f :

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ (où $x_0 \in \mathbb{R}$), alors $\mathscr{C}_f$ admet une **asymptote verticale** d'équation $x = x_0$.

- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$, alors $\mathscr{C}_f$ admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = \ell$ en $\pm\infty$.

Uniquement si l'énoncé le demande, on étudiera si $\mathscr{C}_f$ admet une **asymptote oblique** Δ d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$ (même chose en $-\infty$). Pour cela, on étudie l'écart algébrique $\varepsilon(x) = f(x) - (ax + b)$ entre $\mathscr{C}_f$ et Δ :

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$, alors Δ est asymptote de $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

- Le signe de $\varepsilon(x)$ donne la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

Étude de la continuité

On pensera à toujours préciser le **domaine de continuité** : c'est le même que le domaine de définition sauf s'il y a une **partie entière**.

Si l'énoncé le demande, il faudra étudier la continuité en un point $x_0 \in \mathscr{D}_f$ en dehors du domaine de continuité. Pour cela, on calcule la limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$:

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, alors f est continue en x_0.
- Sinon, f n'est pas continue en x_0.

On peut éventuellement distinguer continuité à gauche et à droite si les limites sont différentes en x_0^- et x_0^+.

Exercice. Étudier la continuité en 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Correction.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$, on a $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$ par composition des limites.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ et f est bien continue en 0.

Si l'énoncé le suggère, on pourra aussi étudier le prolongement par continuité de la fonction f en un point $x_0 \notin \mathscr{D}_f$ qui est une borne du domaine de définition. Pour cela, on calcule $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$:

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, alors f est prolongeable par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = \ell$.
- Sinon, f n'est pas prolongeable par continuité en x_0.

On peut éventuellement prolonger f par continuité à gauche ou à droite si les limites sont différentes en x_0^- et x_0^+.

Exercice. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ? en 1 ?

Correction.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$ donc f est prolongeable en 0 en posant $f(0) = 0$.
$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\ln(x)} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = +\infty$ donc f n'est pas prolongeable en 1 (par contre, $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$).

Étude de la dérivabilité

Avant de dériver la fonction, on pensera systématiquement à préciser le **domaine de dérivabilité** : c'est le même que le domaine de continuité sauf s'il y a une **valeur absolue** ou une **racine carrée**. Dans ce cas, il faut supprimer les valeurs qui annulent la valeur absolue ou la racine carrée.

Si l'énoncé le demande, il faudra étudier la dérivabilité en un point x_0 en dehors du domaine de dérivabilité où f est continue. Pour cela, on calcule la limite du **taux d'accroissement** en x_0 :

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.
- Sinon, f n'est pas dérivable en x_0.

On peut éventuellement distinguer dérivabilité à gauche et à droite si les limites sont différentes en x_0^- et x_0^+.

Exercice. Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Correction.

Rappelons qu'une fonction qui n'est pas continue en un point ne peut pas être dérivable en ce point !
Ici, on a vu précédemment que f est continue en 0. Elle est donc peut-être dérivable en 0. Pour le savoir, on étudie le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}e^{-1/x^2} = \pm\sqrt{\frac{1}{x^2}}e^{-1/x^2} = \pm\frac{\sqrt{X}}{e^X} \quad \text{en posant } X = \frac{1}{x^2}.$$

Or $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\sqrt{X}}{e^X} = 0$ par croissance comparée.
Donc, par composition des limites, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Calcul de la dérivée

Pour tout x dans le domaine de dérivabilité de f, on peut alors calculer $f'(x)$. Pour cela, rappelons les différentes formules à utiliser :

Fonction $f(x) = ...$	Fonction dérivée $f'(x) = ...$
constante	0
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$(u(x))^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u'(x)(u(x))^{\alpha-1}$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$\lambda u(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$
$u(v(x))$	$v'(x)u'(v(x))$

On termine le calcul de la dérivée en **factorisant au maximum**.

Tableau de variation

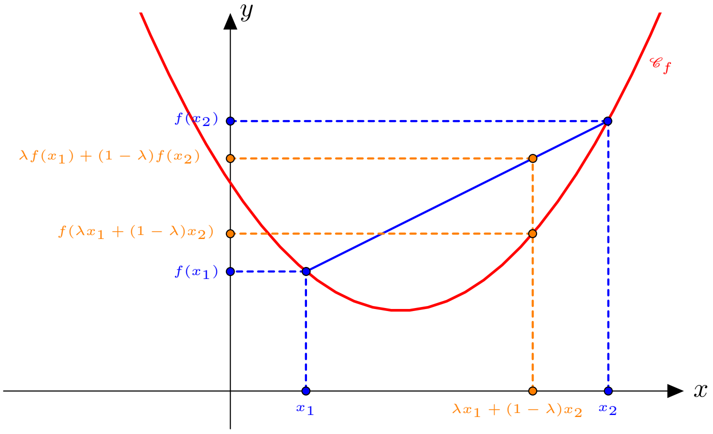
Dans un même tableau :

- On détermine le signe de $f'(x)$ pour tout x dans le domaine de dérivabilité de f.
- On en déduit les variations de f sur son domaine de définition.
- On complète le tableau de variation avec les limites aux bornes du domaine de définition (et on vérifie que c'est bien cohérent avec les variations de f).

Convexité

Pour étudier la convexité de la fonction f, il faut calculer sa dérivée seconde f'' (en justifiant avant que f' est continue et dérivable !) puis étudier son signe :

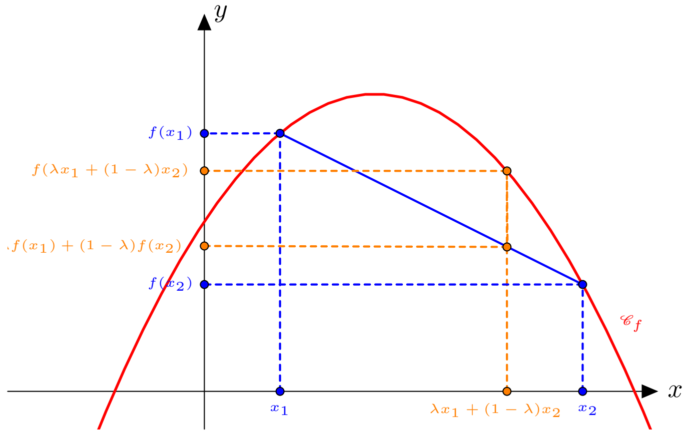
- Si $f''(x) \geq 0$, f est **convexe**. Dans ce cas :
  - $\mathscr{C}_f$ est toujours **en dessous de ses cordes** :



$$\forall x_1, x_2 \in I,\ \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

  - $\mathscr{C}_f$ est toujours **au dessus de ses tangentes**.

- Si $f'' \leq 0$, f est **concave**. Dans ce cas :
  - $\mathscr{C}_f$ est toujours **au dessus de ses cordes** :



$$\forall x_1, x_2 \in I,\ \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

  - $\mathscr{C}_f$ est toujours **en dessus de ses tangentes**.

- Si f'' s'annule et change de signe en a, $\mathscr{C}_f$ admet un **point d'inflexion** $A = (a, f(a))$ (qui caractérise un changement de convexité). Dans ce cas, $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente T_A en A d'équation :

$$T_A : \ y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Tracé de la courbe représentative

On termine l'étude en traçant la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction (si l'énoncé le demande) :

- On commence par placer les différents points remarquables de la courbe (maximum, minimum, points d'intersections avec les axes, points d'inflexions...).
- On trace les tangentes en ces points.
- On trace les éventuelles asymptotes horizontales, verticales, obliques.
- On trace enfin $\mathscr{C}_f$ (en faisant attention à respecter la parité, la convexité...).

3.3 Bijection et bijection réciproque

Définition.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans J. La fonction f est une **bijection** de I dans J lorsque tout élément $y \in J$ possède **un unique antécédent** $x \in I$ par f. Autrement dit :

$$\forall y \in J,\ \exists! x \in I,\ y = f(x).$$

Pour démontrer qu'un application est bijective, on utilisera en général le :

Théorème 24 (de la bijection)

Soit f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Alors $J = f(I)$ est un intervalle et f réalise une **bijection** de I dans J.

Méthode.

Pour montrer qu'une équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in I$ (qu'on ne cherche pas à expliciter) :

1. *On démontre que f réalise une bijection de I dans un intervalle J à l'aide du théorème de la bijection.*
2. *On vérifie que $0 \in J$. Dans ce cas, 0 admet un unique antécédent $\alpha \in I$ par la bijection f. Ce qui démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in I$.*

Exercice.

1. Montrer que l'équation $x^2 = 3 - \ln(x)$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Correction.

Comme $x^2 = 3 - \ln(x) \Leftrightarrow x^2 - 3 + \ln(x) = 0$, on pose $f(x) = x^2 - 3 + \ln(x)$.
f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x} > 0.$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, f est continue et strictement croissant de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Comme $0 \in \mathbb{R}$ (intervalle d'arrivée de f), 0 admet un unique antécédent $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ (intervalle de départ de f). Autrement dit, l'équation

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 - \ln(x)$$

admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que $\alpha \in]1,2[$.

Correction.
Question classique et méthode à retenir ! On classe les images et on revient aux antécédents en utilisant les variations de f.

Comme $f(1) = -2$, $f(\alpha) = 0$ et $f(2) = 1 + \ln(2)$, on a $f(1) < f(\alpha) < f(2)$.
Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $1 < \alpha < 2$, c'est-à-dire $\alpha \in]1,2[$.

Définition.

Soit f une bijection d'un intervalle I dans $J = f(I)$.
On appelle alors **bijection réciproque** de f la fonction notée f^{-1} définie par :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{lll} J & \to & I \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédant de } y \text{ par } f \end{array} \right.$$

Ainsi, on a pour tout $x \in I$ et $y \in J$:

$$y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x.$$

Propriété 25 (Bijection et bijection réciproque)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, **continue** et **strictement monotone**. Alors f réalise une **bijection** de I dans $J = f(I)$, et sa **bijection réciproque** vérifie :

(1) Pour tout $x \in I$ et $y \in J$,

$$f^{-1} \circ f(x) = x \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1}(y) = y.$$

En particulier, f^{-1} réalise une **bijection** de J sur I.

(2) Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont **symétriques par rapport à la première bissectrice du plan d'équation** $y = x$.

(3) f^{-1} est elle-même **continue** sur J, **strictement monotone** et de **même sens de variation** que f.

(4) Si $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \lim_{x \to b} f^{-1}(x) = a.$$

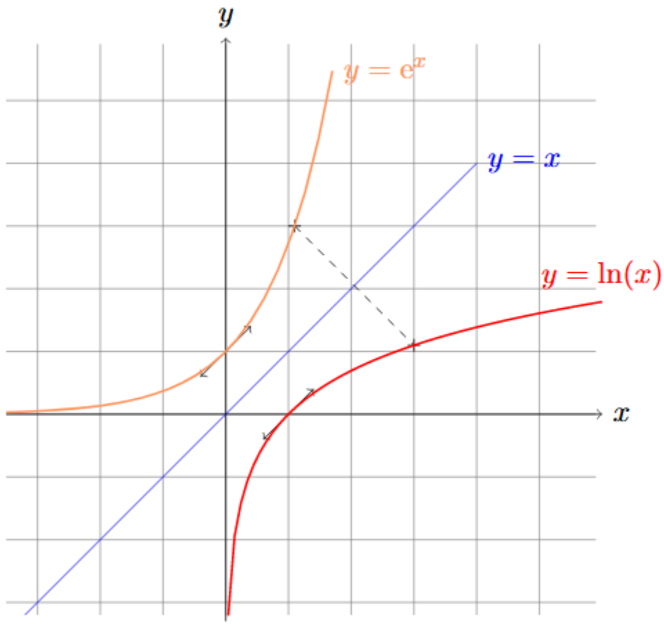
(5) Si f est **dérivable** sur I et si f' **ne s'annule pas** sur I, alors f^{-1} est **dérivable** sur J et

$$\forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Exemple. Les fonctions $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ sont **bijections réciproques** l'une de l'autre :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exp \circ \ln(x) = \exp(\ln(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \ln \circ \exp(y) = \ln(\exp(y)) = y.$$

Ceci se remarque aussi graphiquement puisque les courbes représentatives de ln et de exp sont symétriques par rapport à la droite $y = x$:



Méthode.

Pour démontrer qu'une fonction $f : I \to J$ est bijective et obtenir sa bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$, deux possibilités :

- *Si on nous donne l'expression de la bijection réciproque, il suffit de vérifier que :*

$$\forall x \in I,\ f^{-1} \circ f(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in J,\ f \circ f^{-1}(y) = y$$

- *Sinon, on résout l'équation $y = f(x)$ (d'inconnue x) et on montrer qu'elle possède une unique solution qui est $x = f^{-1}(y)$.*

Exercices.

1. On considère les fonctions suivantes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]0,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{e^x+1} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \ln\left(\dfrac{1-y}{y}\right) \end{array} \right.$$

Démontrer que f et g sont bijections réciproques l'une de l'autre.

Correction.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g\left(\frac{1}{e^x+1}\right) = \ln\left(\frac{1 - \frac{1}{e^x+1}}{\frac{1}{e^x+1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{e^x}{e^x+1}}{\frac{1}{e^x+1}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1} \times \frac{e^x+1}{1}\right) = \ln(e^x) = x. \end{aligned}$$

Pour tout $y \in]0,1[$,

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = f\left(\ln\left(\frac{1-y}{y}\right)\right) = \frac{1}{\frac{1-y}{y}+1} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y.$$

Donc f et g sont bijections réciproques l'une de l'autre.

2. On considère la fonction f définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl}]-1,1[& \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \end{array} \right.$$

Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

✎ **Correction.**

Soit $y \in]0,+\infty[$. On résout l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in]-1,1[$. Si cette équation admet une unique solution, alors f est bijective et on obtiendra une forme explicite de f^{-1}.

$$\begin{aligned} y = f(x) & \Leftrightarrow & y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \\ & \Leftrightarrow & y^2 = \frac{1+x}{1-x} \\ & \Leftrightarrow & x + xy^2 = y^2 - 1 \\ & \Leftrightarrow & x = \frac{y^2-1}{y^2+1} \end{aligned}$$

L'équation $y = f(x)$ admet une unique solution $x = \dfrac{y^2-1}{y^2+1}$. Donc f est bijective et admet pour bijection réciproque :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to &]-1,1[\\ y & \mapsto & \dfrac{y^2-1}{y^2+1} \end{array} \right.$$