Logique et raisonnements

I - Enoncés logiques

Définition 1 :
On appelle ***assertion*** ou ***énoncé logique*** toute phrase mathématique, contenant éventuellement des variables, qui est soit vraie, soit fausse, en fonction de la valeur donnée à ces éventuelles variables.

Remarques :

- ▷ A tout énoncé logique on peut attribuer, suivant les valeurs données aux éventuelles variables, l'une des deux ***valeurs de vérité*** : V (vrai) ou F (faux). C'est le principe du ***tiers exclus***.
- ▷ Un énoncé logique ne peut être vrai et faux en même temps : c'est le principe de ***non contradiction***.

Remarque :

Les énoncés logiques du monde mathématique sont ceux qui peuvent se traduire par des formules où interviennent des ensembles de nombres (entiers, réels,...), des constantes (0, 1,...), des variables (x, a,...), des opérations ($+$,$\times$,..), des relations ($=$, $\leqslant$,...), et des symboles ($\exists$, $\forall$,$\in$,$\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$), et qui respectent une certaine syntaxe.

Exemples 1 :

- ▷ "$1 > 0$", "$1 = 0$" sont deux énoncés logiques sans variable.
- ▷ "$x \geqslant 1$", "$a + b = 5$", "$z^2 = -1$", "p est un nombre premier" sont des énoncés logiques avec variable(s), dont la véracité dépend de la valeur donnée à ce ou ces variables.
- ▷ *"5 est un multiple de 2"* est une énoncé logique faux.
- ▷ *"Quelle heure est-il ?"*, *"La Chine est loin"*, *"Reims est une très grande ville"* ne sont pas des énoncés logiques.

Notations - Convention :

1/ Les énoncés logiques sans variables seront notés simplement par des lettres (majuscules le plus souvent).

2/ Les énoncés dépendant de variables seront notés par des lettres (majuscules le plus souvent), suivies du nom des variables encadrées par des parenthèses.

Exemples 2 :

▷ Si on pose $P = "1 > 0"$ et $Q = "1 = 0"$, alors P est un énoncé vrai sans variable et Q est un énoncé faux sans variable.

▷ Si on pose $P(x) = "x \geqslant 1"$, $Q(a,b) = "a + b = 5"$, $R(z) = "z^2 = -1"$, $S(p) =$ "p est un nombre premier", alors $P(x)$, $Q(a,b)$, $R(z)$ et $S(p)$ sont des énoncés logiques avec variable(s).
$P(2)$ est vrai, $P(-5)$ est faux, $Q(3,2)$ est vrai, $Q(3,1)$ est faux, $R(i)$ et $R(-i)$ sont vrais, $R(-1)$ est faux, $S(5)$ est vrai, $S(6)$ est faux.

▷ Posons Q=*"Reims est une plus grande ville que Paris"*. Alors Q est un énoncé logique faux.

Terminologie :

▷ En mathématiques, il existe des énoncés logiques que l'on admet à priori comme étant des «énoncés logiques vrais» (mais dont on ne peut justifier la véracité). On les appelle alors ***axiomes*** ou ***postulats*** ; ces énoncés logiques vrais constituent le fondement des mathématiques.

▷ Les autres énoncés vrais dont on peut justifier la véracité par un raisonnement, s'appellent ***théorèmes*** (qui sont des énoncés logiques vrais ayant une certaine importance), ***corollaires*** (qui sont des théorèmes de moindre importance et qui sont la conséquence d'autres théorèmes), ***lemmes*** (qui sont des théorèmes de peu d'importance, mais préparatoires à l'établissement de nouveaux théorèmes).

▷ Les ***conjectures*** sont des énoncés logiques que l'on pense être vrais, mais que l'on n'est pas encore parvenu à démontrer.

▷ Les ***propositions*** désignent dans la pratique des cours de mathématiques, des théorèmes intermédiaires ou de moindre importance ; et même, on a tendance à appeler "propositions", la plupart des théorèmes pour réserver le mot "théorème" aux plus grands d'entre eux.

Remarque : En mathématiques, quand on demande de "montrer un énoncé logique", il s'agit de montrer que cet énoncé est vrai.

Définition 2 :
Si P et Q sont deux énoncés logiques ayant la même signification (ou même interprétation), on écrira $P \longmapsto\!\!\!\!\dashv Q$. On dira alors P et Q sont ***synonymes***.
Dans le cas contraire, on écrira : $P \not\longmapsto\!\!\!\!\dashv Q$

Exemples 3 :

1/ "Ce ballon n'est pas assez gonflé" $\longmapsto\!\!\!\!\dashv$ "Ce ballon est sous gonflé"

2/ "x est un nombre réel négatif ou nul" $\longmapsto\!\!\!\!\dashv$ "x est un nombre réel qui n'est pas strictement positif"

3/ "4>0" $\not\longmapsto\!\!\!\!\dashv$ "5>0"

II - Quantificateurs

NOTATIONS :

1) Pour abréger l'écriture des énoncés logiques de type "*Il existe (au moins un) ... tel que ...*", on emploie le quantificateur $\exists$.

2) Pour abréger l'écriture des énoncés logiques de type "*Tous les ... sont tels que ...*", on emploie le quantificateur $\forall$.

REMARQUES :

- "*Pour tout x de E, ...*" se note : "$\forall x \in E$, ..."
- "*Il existe au moins un x de E tel que ...*" se note : "$\exists x \in E$, ..."
- "*Il existe un unique x de E tel que ...*" se note : "$\exists! x \in E$, ..."

EXEMPLES 4 :

1/ "*$\forall x \in \mathbb{N}$, x est un entier multiple de 2*" est un énoncé logique faux et "*$\exists x \in \mathbb{N}$, x est un entier multiple de 2*" est vrai.

2/ Si on pose $P(x) =$ "x est un entier multiple de 2", alors l'énoncé "$\forall x \in \mathbb{N}$, x est un entier multiple de 2" peut s'écrire "$\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$" et l'énoncé "$\exists x \in \mathbb{N}$, x est un entier multiple de 2" peut s'écrire "$\exists x \in \mathbb{N}, P(x)$".
On peut alors poser : $Q =$ "$\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$" et $R =$ "$\exists x \in \mathbb{N}, P(x)$" ; Q est un énoncé logique faux et R est un énoncé logique vrai.

3/ L'énoncé logique $P =$ "$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x - 2 = 0$" est faux et l'énoncé logique $Q =$ "$\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x - 2 = 0$" est vrai.

Règles 1 : *(Commutativité des quantificateurs)*

1) Dans un énoncé logique, permuter deux quantificateurs identiques ne modifie pas le sens de l'énoncé. Autrement dit, si E et F sont deux ensembles et $P(x,y)$ un énoncé logique dépendant de deux variables x et y (respectivement dans E et F) alors :

$$\triangleright \ \big[\forall x \in E, \forall y \in F,\ P(x,y)\big] \longmapsto \big[\forall y \in F, \forall x \in E,\ P(x,y)\big]$$

$$\triangleright \ \big[\exists x \in E, \exists y \in F,\ P(x,y)\big] \longmapsto \big[\exists y \in F, \exists x \in E,\ P(x,y)\big]$$

2) Dans un énoncé logique, permuter deux quantificateurs distincts modifie en général le sens de l'énoncé. Autrement dit, si E et F sont deux ensembles et $P(x,y)$ un énoncé logique dépendant de deux variables x et y (respectivement dans E et F) alors :

T.S.V.P.

▷ "$\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y)$" signifie que : pour tout élément $x \in E$, on peut trouver un élément $y \in F$ (qui va varier en fonction de chaque $x \in E$)) tel que $P(x,y)$ est vrai.

▷ "$\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x,y)$" signifie que : il existe au moins un élément $y \in F$ fixé, tel que pour n'importe $x \in E$, $P(x,y)$ est vrai

Donc, en général :

$$\left[\forall x \in E, \exists y \in F,\ P(x,y)\right] \not\longmapsto\!\dashv \left[\exists y \in F, \forall x \in E,\ P(x,y)\right]$$

Remarque : De façon plus générale, on peut permuter un nombre quelconque de quantificateurs qui sont tous de même nature.

Exemples 5 :

1/ $\left[\forall x \in]0,+\infty[, \forall n \in \mathbb{N},\ \ln(x^n) = n\ \ln x\right] \longmapsto\!\dashv \left[\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,+\infty[,\ \ln(x^n) = n\ \ln x\right]$

2/ $\left[\exists x \in]-\infty,0[, \exists y \in \mathbb{N},\ (x+\pi)^2 + (y-5)^2 = 0\right] \longmapsto\!\dashv \left[\exists y \in \mathbb{N}, \exists x \in]-\infty,0[,\ (x+\pi)^2 + (y-5)^2 = 0\right]$

3/ Par contre : $\left[\forall m \in \mathbb{Z}, \exists p \in \mathbb{Z},\ m+p=1\right]$ n'est pas synonyme de $\left[\exists p \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z},\ m+p=1\right]$

III - Connecteurs

A partir de plusieurs énoncés logiques, on peut construire, en suivant certaines règles d'assemblage de nouveaux énoncés logiques à l'aide des opérateurs logiques tels que : *"Non"*, *"Et"*, *"Ou"*, appelés ***connecteurs***.

1 - Le connecteur unaire "Non"

La ***négation*** d'un énoncé logique P , est l'énoncé : non(P) (noté encore : $\urcorner P$).

Le symbole "$\urcorner$" s'appelle ***connecteur de négation***.

Exemples 6 :

1/ La négation de "$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$" est "$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$". Autrement dit : $\left[\urcorner(\sqrt{2} \in \mathbb{Q})\right] \longmapsto\!\dashv \left[\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}\right]$

2/ La négation de l'énoncé logique "$\pi < 3$" est "$\pi \geqslant 3$". Autrement dit : $\left[\urcorner(\pi < 3)\right] \longmapsto\!\dashv \left[\pi \geqslant 3\right]$

Règles 2 :

1) $\urcorner(\urcorner P) \longmapsto\!\dashv P$

2) $\urcorner P$ est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie.

Table de vérité : On peut représenter par un tableau, la correspondance entre les valeurs de vérité de P et de $\urcorner P$. Ce tableau s'appelle ***table de vérité*** du connecteur "Non"

P	$\urcorner P$
V	F
F	V

Règles 3 :
Si E est un ensemble et $P(x)$ un énoncé dépendant de la variable x, alors :

1) $\left[\urcorner(\forall x \in E,\ P(x))\right] \longmapsto \left[\exists x \in E,\ \urcorner(P(x))\right]$

2) $\left[\urcorner(\exists x \in E,\ P(x))\right] \longmapsto \left[\forall x \in E,\ \urcorner(P(x)))\right]$

Exemples 7 :

1/ $\urcorner$(*Tous les étudiants inscrits à la fac de Reims aiment faire des maths*) $\longmapsto$

(*Au moins un étudiant inscrit à la fac de Reims n'aime pas faire de maths*)

2/ $\left[\urcorner(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 2 = 0)\right] \longmapsto \left[\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 2 \neq 0\right]$

3/ $\left[\urcorner(\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}^-,\ x^2 = y^2\right] \longmapsto \left[\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^-,\ x^2 \neq y^2\right]$

2 - Disjonction et conjonction

A partir de deux énoncés P et Q, on peut construire les énoncés "P et Q" (notée aussi "$P \wedge Q$") et "P ou Q" (notée également "$P \vee Q$").

Terminologie :

▷ Les symboles "$\wedge$" et "$\vee$" s'appellent respectivement ***connecteur de conjonction*** et ***connecteur de disjonction***.

▷ L'énoncé "$P \wedge Q$" s'appelle ***conjonction des propositions P et Q*** et l'énoncé "$P \vee Q$" s'appelle ***disjonction des propositions P et Q***.

Table de vérité des connecteurs "Et", "Ou"

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

<u>Remarques</u> : La table de vérité permet d'en déduire que :

▷ "P ou Q" est vraie lorsqu'au moins l'une des deux assertions P, Q est vraie et fausse sinon.

▷ "P et Q" est vraie lorsque les deux assertions P, Q sont vraies et fausse pour les autres cas.

⚠ Le "OU" mathématique est *inclusif*, à la différence du "OU" français : si on vous demande "*fromage ou dessert*", on sous-entend que l'on ne peut pas prendre les deux en même temps... En mathématiques, $P \vee Q$ est vraie même si P et Q sont vrais simultanément.

<u>Remarques</u> : Grâce à une table de vérité, on peut vérifier que :

▷ "P ou $\urcorner P$" est un énoncé logique toujours vrai.

▷ "P et $\urcorner P$" est un énoncé logique toujours faux.

Règles 4 : *(Distributivité de "$\forall$" sur "et", et distributivité de "$\exists$" sur "ou")*
Soit E est un ensemble ; si $P(x)$ et $Q(x)$ sont des énoncés logiques qui dépendent de l'objet variable x, alors :

1/ $\Big[\forall x \in E, \big(P(x) \text{ et } Q(x)\big)\Big] \longmapsto \Big[\big(\forall x \in E, P(x)\big) \text{ et } \big(\forall x \in E, Q(x)\big)\Big]$

2/ $\Big[\exists x \in E, \big(P(x) \text{ ou } Q(x)\big)\Big] \longmapsto \Big[\big(\exists x \in E, P(x)\big) \text{ ou } \big(\exists x \in E, Q(x)\big)\Big]$

<u>Exemples 8</u> :

1/ ["Chaque dimanche, Mr Dupont fait du vélo et un footing"] $\longmapsto$ ["Chaque dimanche, Mr Dupont fait du vélo " et "Chaque dimanche, Mr Dupont fait un footing"]

2/ $\Big[\forall x \in \mathbb{R}, \big(x^2 + x + 1 > 0 \text{ et } \sin x \leqslant 1\big)\Big] \longmapsto \Big[\big(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 > 0\big) \text{ et } \big(\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x \leqslant 1\big)\Big]$

3/ ["Mr Dupont fait du vélo ou un footing au moins un jour par semaine"] $\longmapsto$ ["Mr Dupont fait du vélo au moins un jour par semaine " ou "Mr Dupont fait un footing au moins un jour par semaine"]

4/ $\Big[\exists x \in \mathbb{R},\ \big(x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ ou } x^2 + 1 = 0\big)\Big] \longmapsto \Big[\big(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x + 1 = 0\big) \text{ ou } \big(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 1\big)\Big]$

⚠ En général, "$\forall$" n'est pas distributif sur "ou" et "$\exists$" n'est pas distributif sur "et")

<u>Exemples 9</u> :

1/ ["Chaque dimanche, Mr Dupont fait du vélo ou un footing"] $\not\longmapsto$ ["Chaque dimanche, Mr Dupont fait du vélo " ou "Chaque dimanche, Mr Dupont fait un footing"]

2/ ["Mr Dupont fait du vélo et un footing au moins un jour par semaine"] $\not\longmapsto$ ["Mr Dupont fait du vélo au moins un jour par semaine " et "Mr Dupont fait un footing au moins un jour par semaine"]

Règles 5 : *(Idempotence)*

Soit P un énoncé logique. Alors :

1/ $\Big[P \text{ ou } P\Big] \longmapsto\!\dashv P$

2/ $\Big[P \text{ et } P\Big] \longmapsto\!\dashv P$

Règles 6 : *(Commutativité et associativité des connecteurs de conjonction et de disjonction)*

Soient P, Q et R des énoncés logiques. Alors :

1) $\Big[P \text{ ou } Q\Big] \longmapsto\!\dashv \Big[Q \text{ ou } P\Big]$ *(Commutativité du "Ou")*

2) $\Big[P \text{ et } Q\Big] \longmapsto\!\dashv \Big[Q \text{ et } P\Big]$ *(Commutativité du "Et")*

3) $\Big[(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R\Big] \longmapsto\!\dashv \Big[P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)\Big]$ *(Associativité du "Ou")*

4) $\Big[(P \text{ et } Q) \text{ et } R\Big] \longmapsto\!\dashv \Big[P \text{ et } (Q \text{ et } R)\Big]$ *(Associativité du "Et")*

Règles 7 : *(Lois de De Morgan)*

Soient P et Q des énoncés logiques. Alors :

1) $\Big[\text{Non}\big(P \text{ et } Q\big)\Big] \longmapsto\!\dashv \Big[\text{Non}(P) \text{ ou } \text{Non}(Q)\Big]$.

2) $\Big[\text{Non}(P \text{ ou } Q)\Big] \longmapsto\!\dashv \Big[\text{Non}(P) \text{ et } \text{Non}(Q)\Big]$.

Exemples 10 :

1/ $\neg\Big[\forall n \in \mathbb{N},\ \big(n \text{ est pair ou } n \leqslant 5\big)\Big] \longmapsto\!\dashv \Big[\exists n \in \mathbb{N},\ \big(n \text{ est impair et } n > 5\big)\Big]$

2/ $\neg\Big[\forall n \in \mathbb{N},\ \big(n \text{ est pair et } n \leqslant 5\big)\Big] \longmapsto\!\dashv \Big[\exists n \in \mathbb{N},\ \big(n \text{ est impair ou } n > 5\big)\Big]$

Règles 8 : *(Distributivité)*

Soient P, Q et R des énoncés logiques. Alors :

1) $\Big[P \text{ et } \big(Q \text{ ou } R\big)\Big] \longmapsto\!\dashv \Big[\big(P \text{ et } Q\big) \text{ ou } \big(P \text{ et } R\big)\Big]$

2) $\Big[P \text{ ou } \big(Q \text{ et } R\big)\Big] \longmapsto\!\dashv \Big[\big(P \text{ ou } Q\big) \text{ et } \big(P \text{ ou } R\big)\Big]$

Exemple 11 :

$\Big[\exists x \in \mathbb{R},\ (x \leqslant 5 \text{ et } x > 1) \text{ ou } x < 0\Big] \longmapsto\!\dashv \Big[\exists x \in \mathbb{R},\ (x \leqslant 5 \text{ ou } x < 0) \text{ et } (x > 1 \text{ ou } x < 0)\Big]$

3 - Implication

Définition 3 :
Soient P et Q deux énoncés logiques.

1) L'*implication* de Q par P, notée "$P \Rightarrow Q$" (qui se lit "P implique Q", ou bien "Si P alors Q", ou bien encore "P entraîne Q"), est l'énoncé logique qui n'est faux que si P est vrai et Q est faux. Autrement dit $P \Rightarrow Q$ est l'énoncé logique : "$\urcorner P$ ou Q" :

$$\Big[P \Rightarrow Q\Big] \longmapsto \Big[\urcorner P \text{ ou } Q\Big]$$

*(Dans l'énoncé "$P \Rightarrow Q$" : P s'appelle l'**hypothèse** et Q la **conclusion**)*

2) Lorsque "$P \Rightarrow Q$" est un énoncé vrai :

▷ On dit que "P est ***une condition suffisante*** pour que Q soit vrai" et on dit que "Q est ***une condition nécessaire*** pour que P soit vrai".

▷ On dit également : "Pour que Q soit vrai, ***il suffit que*** P soit vrai" ou bien encore "Pour que P soit vrai ***il faut que*** Q soit vrai".

Table de vérité de $\Rightarrow$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque :
L'énoncé $P \Rightarrow Q$ n'est pas synonyme de la phrase "P donc Q". En effet, si la validité de P entraîne, par un phénomène de cause à effet, celle de Q, alors l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie, mais à l'inverse :

- La validité de $P \Longrightarrow Q$ ne sous-entend pas à priori la validité de P. Par exemple, "$0 = 1 \Longrightarrow 1 = 2$" est vraie.
- La validité de $P \Longrightarrow Q$ ne sous-entend pas à priori que Q est la cause de P. Par exemple "$0 = 0 \Longrightarrow 3 > 0$" est vraie.

Définition 4 :
Soient P et Q deux énoncés logiques.

1/ L'énoncé "Non(Q) $\Longrightarrow$ Non(P)" s'appelle ***contraposition*** (ou ***contraposée***) de "$P \Longrightarrow Q$".

2/ L'énoncé "$Q \Longrightarrow P$" s'appelle ***réciproque*** de "$P \Longrightarrow Q$".

Remarques :

1/ Ne pas confondre la négation, la réciproque et la contraposée d'une implication.

2/ Une implication et sa contraposée sont synonymes, comme on le verra plus tard. Une implication et sa négation ne sont jamais équivalentes. En général, une implication et sa réciproque ne sont pas équivalentes.

Exemple 12 :

Soit l'énoncé logique : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\Big[n$ est le carré d'un entier$\Big] \Longrightarrow n \geqslant 0$

▷ La contraposée de cet énoncé est : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n < 0 \Longrightarrow \Big[n$ n'est le carré d'aucun entier$\Big]$

▷ La réciproque de ce énoncé est : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0 \Longrightarrow \Big[n$ est le carré d'un entier$\Big]$

▷ La négation de cet énoncé est : $\exists n \in \mathbb{Z}$, $\Big[n$ est le carré d'un entier$\Big]$ et $n < 0$

4 - Équivalence

Définition 5 :
Soient P et Q deux énoncés logiques.

1/ L'*équivalence* de P et Q, noté "$P \Longleftrightarrow Q$" (qui se lit "P si et seulement si Q", ou "P équivaut à Q", ou "P est équivalent à Q") est l'énoncé logique : "$P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$". Autrement dit :

$$\Big[P \Longleftrightarrow Q\Big] \longmapsto \Big[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)\Big]$$

2/ Lorsque "$P \Longleftrightarrow Q$" est un énoncé logique vrai :

▷ On dit que "P est ***une condition nécessaire et suffisante*** pour que Q soit vrai" et on dit que "Q est ***une condition nécessaire et suffisante*** pour que P soit vrai".

▷ On dit également : "Pour que Q soit vrai, ***il faut et il suffit que*** P soit vrai" ou bien encore "Pour que P soit vrai ***il faut et il suffit que*** Q soit vrai".

▷ On dit également : "P et Q sont ***logiquement équivalentes*** ".

Table de vérité de $\Longleftrightarrow$

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

T.S.V.P.

Remarques :

▷ Il ne faut à priori pas confondre la notion d'énoncés synonymes ($P \longmapsto\!\dashv Q$) avec celle d'énoncés équivalents ($P \iff Q$). Si deux énoncés sont synonymes alors ils ont la même valeur de vérité et sont donc logiquement équivalents. Par contre deux énoncés logiquement équivalentes ne sont pas toujours synonymes.

▷ L'équivalence $P \iff Q$ est vraie lorsque P et Q ont la même véracité. En particulier, une rédaction de type "$P \iff Q$" pour signifier que Q est vraie est une faute logique, si on ne précise pas que P est vraie.

Exemple 13 :

1/ $\Big[3 > 0 \iff 4 > 0\Big]$ est vrai, alors que $\Big[3 > 0 \longmapsto\!\dashv 4 > 0\Big]$ est faux.

2/ $\Big[3 < 0 \iff 4 < 0\Big]$ est vrai, alors que $4 < 0$ est faux.

Règle 9 :
Soient P et Q deux énoncés. Alors :

$$\Big[\text{Non}(P \Longrightarrow Q)\Big] \longmapsto\!\dashv \Big[P \text{ et Non}(Q)\Big]$$

Règles 10 : *(Contraposition)*
Soient P et Q deux énoncés logiques. Alors :

1) $\big(P \Longrightarrow Q\big) \longmapsto\!\dashv \big(\text{Non}(Q) \Longrightarrow \text{Non}(P)\big)$

2) $\big(P \iff Q\big) \longmapsto\!\dashv \big(\text{Non}(Q) \iff \text{Non}(P)\big)$

IV - Techniques de raisonnements

1 - Enoncés contenant des quantificateurs

▷ Pour démontrer un énoncé du type "$\forall x \in E,\ P(x)$", on fixera le plus souvent un élément $x \in E$ (fixé, mais quelconque) et on montrera que $P(x)$ est vrai pour cet élément x (qui représente n'importe quel cas, car quelconque)

▷ Pour démontrer un énoncé du type "$\exists x \in E,\ P(x)$", il suffira d'exhiber un élément particulier $x \in E$ pour lequel $P(x)$ est vrai.

Exemples 14 :

1/ Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C},\ \Big[|\text{Re}(z)| \neq |\text{Im}(z)| \text{ ou } z^2 \in i\mathbb{R}\Big]$

2/ Montrer que : $\exists x \in \mathbb{R},\ \Big[x^2 + x < 0\Big]$

2 - Démontrer une implication "$P \Longrightarrow Q$" par raisonnement direct

Pour montrer par une déduction directe, que "$P \Rightarrow Q$" est vrai, on commence par supposer que P est vrai (P est l'hypothèse du raisonnement) et, grâce à une ***démonstration*** (ou ***preuve*** ou ***justification*** ou ...), on prouve, sous cette hypothèse, que Q est vrai (Q est la conclusion du raisonnement).

EXEMPLES 15 :

1/ Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, \left[z^2 \in \mathbb{R} \Longrightarrow \big(\mathrm{Re}(z) = 0 \text{ ou } \mathrm{Im}(z) = 0\big)\right]$

2/ Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \left[x^2 = x \Longrightarrow |x| = x\right]$

3/ Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |x-2| < x^2 - 2x + 3$

3 - Démontrer une implication "$P \Longrightarrow Q$" grâce à un raisonnement par contraposée

Pour démontrer par contraposition que "$P \Longrightarrow Q$" est vrai, on commence par supposer que Q est faux et on démontre que P est faux.

EXEMPLES 16 :

1/ Montrer que si $\dfrac{a}{b}$ (où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$) est une fraction irréductible, alors a et b ne sont pas tous les deux pairs.

2/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, [n^2 \text{ est pair} \Longrightarrow n \text{ est pair}]$

4 - Démontrer une équivalence "$P \Longleftrightarrow Q$"

On pourra procéder de l'une des deux deux façons suivantes :

▷ On construit une suite finie d'équivalences entre P et Q

▷ On montre séparément les deux implications $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$

EXEMPLE 17 :

1/ Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \left[x^2 - 1 \in [0,1] \Longleftrightarrow x \in [1, \sqrt{2}] \cup [-\sqrt{2}, -1]\right]$

2/ Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geqslant \dfrac{\ln x + \ln y}{2}$

5 - Raisonnement par l'absurde

Pour montrer par l'absurde qu'un énoncé est vrai, on commence par supposer que cet énoncé est faux, et on doit alors aboutir à une contradiction.

En particulier, pour démontrer par l'absurde que "$P \Rightarrow Q$" est vrai, on commence par supposer que P est vrai et Q faux, et on doit alors aboutir à une contradiction.

EXEMPLES 18 :

1/ Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{N}, \left[\big(ab \text{ impair}\big) \Longrightarrow (a \text{ et } b \text{ impairs})\right]$

2/ Montrer que : $\forall a, b \left[\big(a \in \mathbb{Q} \text{ et } b \notin \mathbb{Q}\big) \Longrightarrow a + b \notin \mathbb{Q}\right]$

3/ Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

6 - Raisonnement par récurrence

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ un énoncé logique défini pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$.

Raisonnement par récurrence faible :

Pour montrer que $P(n)$ est vrai pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, il suffit de prouver que :

1) $P(n_0)$ est vrai (*Initialisation*)

2) Pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, si $P(n)$ est vrai alors $P(n+1)$ est vraie (*Hérédité*)

Raisonnement par récurrence forte :

Pour montrer que $P(n)$ est vrai pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, il suffit de prouver que :

1) $P(n_0)$ est vrai.

2) Pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, si $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, ..., $P(n)$ sont vrais alors $P(n+1)$ est vrai.

Exemples 19 :

1/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 9 | 13^n - 4^n$.

2/ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite défine par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + 2^n$

7 - Raisonnement par analyse et synthèse

Pour justifier l'existence (et parfois l'unicité) d'une solution à un problème, on peut être amené à déterminer la forme de celle-ci, qui n'est pas nécessairement donnée dans l'énoncé. On raisonne alors par analyse et synthèse :

Analyse : On suppose qu'il existe au moins une solution, et on essaie d'en tirer le maximum de renseignements la concernant, afin d'établir une liste (courte !) de solutions possibles.

Synthèse : On reporte dans le problème initial la ou les solution(s) trouvée(s) précédemment, ce qui permet de déterminer s'il y a bien une solution (puis une unique, ou plusieurs).

Conclusion : On énonce le résultat demandé.

Exemples 20 :

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\sqrt{2x+3} = x$, en effectuant un raisonnement par Analyse-Synthèse, puis en effectuant un raisonnement par équivalence.

2/ Montrer que la fonction exp peut s'écrire, et d'une seule façon, sous la forme d'une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

****