Chapitre 10

Calcul matriciel

Compétences attendues.

✓ Maitriser les différentes opérations sur les matrices (somme, produit par un réel, produit de deux matrices, transposée d'une matrice).

✓ Calculer les puissances d'une matrice carrée à l'aide de l'une des méthodes suivantes (selon les questions de l'énoncé) :

- en déterminant la formule à démontrer par récurrence,
- avec la formule du binôme de Newton,
- à l'aide de suites usuelles,
- en se ramenant aux puissances d'une matrice diagonale.

✓ Faire le lien entre matrices et systèmes linéaires.

✓ Prouver qu'une matrice est inversible et déterminer son inverse à l'aide de l'une des méthodes suivantes (selon les question de l'énoncé) :

- en faisant le produit matriciel si l'inverse est donnée,
- à partir d'une équation polynomiale vérifiée par la matrice,
- à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition.

Soient n et p deux entiers ≥ 1.

- On appelle **matrice** à n **lignes** et p **colonnes** ou **matrice** $n \times p$ tout tableau de $n \times p$ nombres réels rangés sur n lignes et p colonnes. Les éléments constituant une matrice $n \times p$ sont appelés **coefficients** de la matrice et les entiers n et p sont les **dimensions de la matrice**.

- Si A est une matrice $n \times p$, on note $a_{i,j}$ le coefficient de la i-ième ligne et de la j-ième colonne et on écrit :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

  S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le nombre de lignes et le nombre de colonnes, on pourra noter plus simplement $A = (a_{i,j})$.

- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Si $n = p$, cet ensemble est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ses éléments sont alors appelés **matrices carrées d'ordre** n.

Exemples. La matrice A est de dimension 2×3, la matrice B est de dimension 3×2 et la matrice C est une matrice carrée d'ordre 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \sqrt{2} & 0 \\ -1 & \ln(2) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}), \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \pi & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Pour ces matrices, on a par exemple :

$$a_{1,2} = 0,\ a_{2,3} = 5,\ b_{2,2} = 0,\ b_{3,1} = -1,\ c_{1,1} = c_{2,2} = 2.$$

Définition.

- Toute matrice $n \times 1$ est appelée **matrice colonne** et toute matrice $1 \times p$ est appelée **matrice ligne**. On identifie les matrices 1×1 et les réels.

- Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice $n \times p$. Alors :
  - Si $i \in [\![1, n]\!]$, la matrice ligne $(a_{i,j})_{1 \leq j \leq p} = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,p} \end{pmatrix}$ est la i-ième ligne de A.
  - Si $j \in [\![1, p]\!]$, la matrice colonne $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ est la j-ième colonne de A.

Définition.

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n.

- Les coefficients $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ sont appelés **coefficients diagonaux** de A.

- Les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i > j$ sont donc situés en dessous de la diagonale de A tandis que les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i < j$ sont situés au dessus de la diagonale.

Définition.

Deux matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont **égales** si elles ont mêmes dimensions $n \times p$ et si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, p]\!],\ a_{i,j} = b_{i,j}.$$

Dans le cas contraire, on dira que les matrices A et B sont **distinctes**.

Exemples.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 3 & (-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 Matrices particulières

Définition.

- Une matrice carrée $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **diagonale** si pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$.
- Une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux est dite **matrice scalaire**.

Exemples. Les matrices D_1 et D_2 suivantes sont diagonales. La matrice D_3 est scalaire :

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\quad D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Définition.

- La **matrice nulle d'ordre** $n \times p$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls. Cette matrice est notée $0_{n,p}$ ou 0_n si $n = p$.
- La **matrice identité d'ordre** n est la matrice diagonale (ou scalaire) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1. Cette matrice est notée I_n.

Exemples.

$$0_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}),\quad 0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Définition.

- Une matrice carrée $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **triangulaire supérieure** si, pour tous i et j tels que $i > j$, $a_{i,j} = 0$, c'est-à-dire si tous les coefficients situés en dessous de la diagonale sont nuls.
- Une matrice carrée $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **triangulaire inférieure** si, pour tous i et j tels que $i < j$, $a_{i,j} = 0$, c'est-à-dire si tous les coefficients situés au dessus de la diagonale sont nuls.

Exemples. La matrice A est triangulaire supérieure et la matrice B est triangulaire inférieure :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

2 Opérations sur les matrices

2.1 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$

Addition des matrices

Définition.

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ définie par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,p]\!],\ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},$$

est appelée **somme** des matrices A et B et on note $C = A + B$. L'opération définissant la somme de deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelée l'**addition des matrices** dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ -\dfrac{1}{2} & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Attention.

L'addition de deux matrices de dimensions différentes n'est pas définie.

Propriété 1 (de l'addition)

(1) L'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une loi de composition **interne**, c'est-à-dire :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

(2) L'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est **associative**, c'est-à-dire :

$$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ (A + B) + C = A + (B + C).$$

Ainsi, la somme de trois matrices A, B, C pourra être notée $A + B + C$ sans parenthèse.

(3) L'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est **commutative**, c'est-à-dire :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ A + B = B + A.$$

(4) L'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admet pour **élément neutre** la matrice nulle $0_{n,p}$, c'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ 0_{n,p} + A = A + 0_{n,p} = A.$$

Définition.

L'**opposée** de la matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ est la matrice $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ définie par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,p]\!],\ b_{i,j} = -a_{i,j}.$$

On la note $B = -A$.

Une conséquence directe de cette définition est la propriété suivante :

Propriété 2 (Opposée d'une matrice)

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}.$$

Produit par un réel

Définition.

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et si λ est un réel, la matrice $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ définie par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, p]\!],\ b_{i,j} = \lambda a_{i,j}.$$

est appelée **produit de la matrice** A **par le réel** λ et on note $B = \lambda A$.

Exemple.

$$3\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \sqrt{5} & -\frac{1}{9} & 2 \end{pmatrix} =$$

Remarque. La matrice opposée de A vérifie : $-A = (-1)A$.

Propriété 3 (du produit par un réel)

(1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

(2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

(3) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

2.2 Produit de deux matrices

Définition.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. La matrice $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq q}}$, élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$, définie par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, p]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j},$$

est appelée **produit** des matrices A et B et on note $C = AB$. L'opération définissant le produit d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est appelée **produit matriciel**.

Remarque. On peut interpréter le produit matriciel comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{i,1}} & \cdots & \mathbf{a_{i,k}} & \cdots & \mathbf{a_{i,p}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & \mathbf{b_{1,j}} & \cdots & b_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & \cdots & \mathbf{b_{k,j}} & \cdots & b_{k,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & \mathbf{b_{p,j}} & \cdots & b_{p,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,j} & \cdots & c_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & \cdots & \mathbf{c_{i,j}} & \cdots & c_{i,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,j} & \cdots & c_{n,q} \end{pmatrix}$$

Le terme de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de C s'obtient en sommant les produits des termes de même rang dans la i-ième ligne de A et dans la j-ième colonne de B selon le schéma ci-dessus où l'on a représenté en gras les coefficients de A et B utiles au calcul de $c_{i,j}$.

Attention.

Pour pouvoir effectuer le produit matriciel de A par B, il faut impérativement que le nombre de colonnes de A soit égale au nombre de lignes de B.

Exemple. On considère les cinq matrices A, B, C, D et E suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Énumérer les produits de 2 ou 3 de ces matrices qui sont définis et les calculer.

Propriété 4 (du produit matriciel)

(1) Le produit matriciel est **associatif**, c'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ (AB)C = A(BC).$$

Ainsi, le produit de trois matrices A, B et C pourra être noté ABC sans parenthèse.

(2) Le produit matriciel est **distributif** par rapport à l'addition, c'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ A(B+C) = AB + AC,$$

et

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ (A+B)C = AC + BC.$$

(3) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a :

$$I_n A = A \ \text{ et } \ AI_p = A.$$

Attention.

1. Le produit matriciel **n'est pas commutatif**. En général, $AB \neq BA$.
2. On peut avoir $AB = 0_{n,q}$ avec $A \neq 0_{n,p}$ et $B \neq 0_{p,q}$. Par exemple,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ alors } AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En particulier, il est généralement **interdit de simplifier un produit matriciel** :

$$AC = AD \not\Longrightarrow C = D \qquad \text{et} \qquad CA = DA \not\Longrightarrow C = D.$$

2.3 Transposée d'une matrice

Définition.

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on appelle **transposée** de A la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ notée ${}^tA$ définie par :

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & & & a_{n,2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, ${}^tA$ est obtenue à partir de A par échange des lignes et des colonnes.

Exemple. Calculer la transposée de $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Propriété 5 (de la transposition)

(1) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^t\left({}^tA\right) = A$.

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$.

(3) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

(4) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

Définition.

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que A est **symétrique** si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire ${}^tA = A$.
- On dit que A est **antisymétrique** si elle est égale à l'opposée de sa transposée, c'est-à-dire ${}^tA = -A$.

Exemple. Les matrices suivantes sont-elles symétriques ou antisymétriques ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3 Cas des matrices carrées

3.1 Puissance d'une matrice carrée

Définition.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **puissance k-ième** de A la matrice, notée A^k, définie par :

- Si $k = 0$, $A^0 = I_n$.
- Si $k = 1$, $A^1 = A$.
- Si $k \geq 2$, $A^k = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}}$

Attention.

On peut avoir $A^k = 0_n$ alors que $A \neq 0_n$. Par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemples. Calculer les puissances k-ième des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ (avec } a, b, c \in \mathbb{R}\text{).}$$

Dans le cas des matrices diagonales, on retiendra la propriété suivante :

Propriété 6 (Puissance d'une matrice diagonale)

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Autrement dit, la puissance d'une matrice diagonale est la diagonale des puissances.

La formule du binôme de Newton permet dans certains cas de calculer la puissance d'une matrice :

Propriété 7 (Formule du binôme de Newton)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui **commutent**, c'est-à-dire telles que $AB = BA$. Alors, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} A^p B^{k-p}.$$

Exemple. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = I_2 + B$.

2. Calculer B^k pour tout entier naturel k, et en déduire A^k.

3.2 Matrices carrées inversibles

Définition.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est dite **inversible** si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AB = BA = I_n.$$

Propriété 8 (Unicité de l'inverse)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est inversible, alors il existe une **unique** matrice B telle que $AB = BA = I_n$. Cette matrice est appelée l'**inverse** de A et elle est notée A^{-1}.

Remarque. On peut montrer que l'une des égalités $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ implique l'autre. Par conséquent, pour prouver l'inversibilité de A, il suffira d'exhiber une matrice B vérifiant une seule des égalités $AB = I_n$ ou $BA = I_n$, et on aura alors nécessairement $B = A^{-1}$.

Exemples.

1. Vérifier que les matrices $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer $A^2 - A$.

(b) En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.

Remarques. Si A est **inversible**, il est possible de **simplifier les égalités** qui contiennent A en facteur :

- Si $AC = AD$, on a en multipliant par A^{-1} à gauche :

$$AC = AD \Rightarrow A^{-1}(AC) = A^{-1}(AD) \Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{=I_n} C = \underbrace{(A^{-1}A)}_{=I_n} D \Rightarrow C = D.$$

- Si $CA = DA$, on a en multipliant par A^{-1} à droite :

$$CA = DA \Rightarrow (CA)A^{-1} = (DA)A^{-1} \Rightarrow C \underbrace{(AA^{-1})}_{=I_n} = D \underbrace{(AA^{-1})}_{=I_n} \Rightarrow C = D.$$

Attention, il faut distinguer droite et gauche puisque le produit n'est pas commutatif.

Propriété 9 (de l'inverse)

(1) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors A^{-1} l'est aussi et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(2) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors ${}^tA$ l'est aussi et $({}^tA)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

(3) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont inversibles, alors AB l'est aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Remarque. On peut déduire de cette dernière propriété que :

- Si $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont inversibles, alors $A_1 \ldots A_k$ l'est aussi et $(A_1 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \ldots A_1^{-1}$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors A^k l'est aussi et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

4 Matrices et systèmes linéaires

4.1 Écriture matricielle d'un système

Définition.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et (S) le **système linéaire** de n équations à p inconnues réelles $x_1, x_2, \ldots, x_p$ suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

En notant $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, $X = (x_j)_{1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$, on définit trois matrices A, X, B.

$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la **matrice associée au système** (S), X est la matrice colonne à p lignes des inconnues de (S) et B est la matrice colonne à n lignes du second membre de (S).

On peut ainsi écrire le système (S) sous forme d'une égalité matricielle :

$$AX = B$$

où AX représente le produit matriciel de A et X.

Exemple. Considérons le système linéaire suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} -3x & + & 5y & + & 6z & = & 1 \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & -1 \end{array}\right.$$

Écrire (S) sous forme matricielle et donner la matrice associée à (S).

Théorème 10 (Systèmes de Cramer et matrices inversibles)

Soient (S) un système de n équations à n inconnues, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice associée à (S), X la matrice colonne des inconnues de (S) et B la matrice colonne du second membre de (S).

(1) Le système (S) est de **Cramer** si et seulement si la matrice A est **inversible**.

(2) Dans ce cas, l'unique solution est donnée par $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

Exemple. Considérons toujours le système linéaire :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} -3x & + & 5y & + & 6z & = & 1 \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & -1 \end{array}\right.$$

Justifier que (S) est de Cramer et donner son unique solution.

Propriété 11 (Inversibilité d'une matrice triangulaire ou diagonale)

(1) Une matrice carrée triangulaire (inférieure ou supérieure) est **inversible** si et seulement si **tous les coefficients de sa diagonale sont non-nuls**.

(2) En particulier, une matrice diagonale est **inversible** si et seulement si **tous les coefficients de sa diagonale sont non-nuls**.

Remarque. L'inverse d'une matrice diagonale (dont tous les coefficients de la diagonale sont non-nuls) est la matrice diagonale des inverses : si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2 Calcul de l'inverse d'une matrice

Méthode.

Pour prouver l'inversibilité d'une matrice A et calculer son inverse, on utilise la méthode du pivot de Gauss :

1. A l'aide des opérations élémentaires sur les lignes, on transforme A en une matrice triangulaire supérieure B.
2. Si au moins un des coefficients diagonaux de B est nul, alors la matrice A est non-inversible.
3. Si les coefficients diagonaux de B sont tous non-nuls, alors la matrice A est inversible. Dans ce cas :
   (a) A l'aide des opérations élémentaires sur les lignes, on transforme B en la matrice identité I_n.
   (b) En appliquant toutes ces transformations élémentaires (pour transformer A en B puis B en I_n) à la matrice identité I_n, on obtient la matrice A^{-1}.

Exemple. Montrer que la matrice A suivante est inversible et calculer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$