Chapitre 10

Intégration

Compétences attendues.

- ✓ Calculer une intégrale sur un segment à l'aide d'une primitive, d'une intégration par parties ou d'un changement de variable.
- ✓ Étudier la nature d'une intégrale généralisée en utilisant la définition.
- ✓ Effectuer une intégration par parties ou un changement de variable sur une intégrale généralisée.
- ✓ Utiliser les propriétés des intégrales pour étudier une suite ou une fonction définie par une intégrale.
- ✓ Connaitre les conditions de convergence des intégrales de Riemann.
- ✓ Utiliser les théorèmes de comparaison (inégalité, négligeabilité, équivalence) pour étudier la nature d'une intégrale généralisée.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECG au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Intégration sur un segment

1.1 Primitives d'une fonction continue

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ telle que :

- F est dérivable sur I.
- Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple. $F(x) = \ln(x)$ est une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Théorème 1 (Existence d'une primitive d'une fonction continue)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

f est **continue** sur l'intervalle I $\quad\Rightarrow\quad$ f admet une **primitive** F sur I.

Attention.

Une fonction continue sur un intervalle I n'admet pas qu'une seule primitive sur I. Ainsi, on ne parle jamais de LA primitive mais d'UNE primitive d'une fonction.

Théorème 2 (Primitives d'une fonction continue)

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I.

(1) Soit F_1 une primitive de f sur I.

$$F_2 \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I \quad\Leftrightarrow\quad \text{Il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \forall x \in I,\ F_2(x) = F_1(x) + k.$$

(2) Soit $c \in I$. Il existe une unique primitive de f sur I s'annulant en c.

Preuve.

□

Propriété 3 (Primitives et opérations)

(1) Soient f et g deux fonctions admettant des primitives F et G sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- λF est une primitive de λf sur I.

(2) Soient f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle J et u une fonction continue et dérivable sur un intervalle I à valeurs dans J.

Alors $F(u)$ est une primitive de $u' \times f(u)$ sur I.

Preuve.

□

Attention.
On n'obtient pas une primitive d'un produit fg en faisant le produit des primitives. En effet,

$$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg \neq fg.$$

Voici le tableau des primitives usuelles à connaître (que l'on peut déduire de la propriété précédente) :

Fonction $f(x) = ...$	Primitives $F(x) = ...$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k,\ k \in \mathbb{R}$
$u'(x)(u(x))^{-1} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + k,\ k \in \mathbb{R}$
$u'(x)(u(x))^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k,\ k \in \mathbb{R}$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ (cas particulier où $\alpha = -\frac{1}{2}$)	$2\sqrt{u(x)} + k,\ k \in \mathbb{R}$

Exercice. Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné :

- $f_1(x) = xe^{3x^2}$ et $I = \mathbb{R}$

- $f_2(x) = \dfrac{3x-1}{3x^2-2x+1}$ et $I = \mathbb{R}$

- $f_3(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et $I = \mathbb{R}_+^*$

- $f_4(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$ et $I =]2, +\infty[$

1.2 Intégrale d'une fonction continue

Définition.

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et $a, b \in I$.
On appelle **intégrale** de f entre a et b le réel noté $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et défini par :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

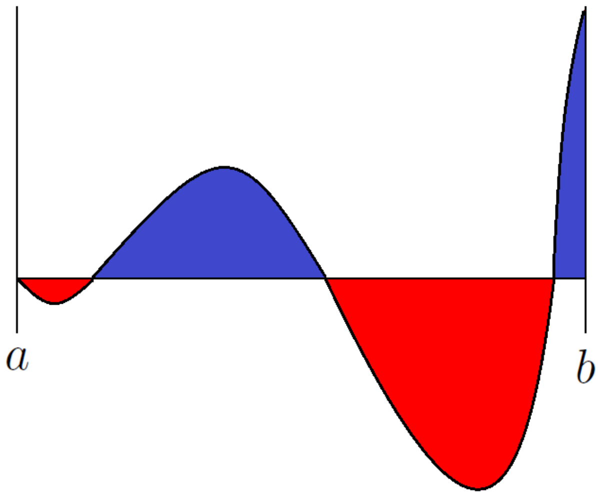
Remarques.

1. La notion d'intégrale est indépendante de la primitive choisie : si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F_2 = F_1 + k$. On a alors :
$$F_2(b) - F_2(a) = (F_1(b) + k) - (F_1(a) + k) = F_1(b) - F_1(a).$$
2. La lettre t dans l'intégrale est muette. On notera indifféremment $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, $\displaystyle\int_a^b f(u)du$...
3. A partir de la définition de l'intégrale, on obtient immédiatement les formules suivantes :
$$\int_a^b 0dt = 0, \qquad \int_a^a f(t)dt = 0, \qquad \int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$$

Interprétation géométrique. L'intégrale d'une fonction f peut s'interpréter géométriquement à l'aide de sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$:

$$\int_a^b f(t)dt = \text{l'aire algébrique sous la courbe } \mathscr{C}_f \text{ entre } a \text{ et } b.$$

Par exemple, si on a :



alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt =$ aire bleue $-$ aire rouge.

1.3 Propriétés de l'intégrale

Théorème 4 (Propriétés de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a, b \in I$.

(1) **Linéarité de l'intégrale** : Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

(2) **Relation de Chasles** : Pour tout $c \in I$,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

(3) **Positivité de l'intégrale** : Supposons que, pour tout réel $t \in I$, $f(t) \geq 0$.

- Bornes croissantes : Si $a \leq b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
- Bornes décroissantes : Si $a \geq b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq 0$.

(4) **Intégration des inégalités** : Supposons que, pour tout réel $t \in I$, $f(t) \leq g(t)$.

- Bornes croissantes : Si $a \leq b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.
- Bornes décroissantes : Si $a \geq b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$.

Preuve.

□

Propriété 5 (Stricte positivité de l'intégrale)

Soient f une fonction **continue** et **positive** sur un segment $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in [a, b],\ f(t) = 0.$$

Attention.
Pour appliquer cette propriété, on prendra soin de bien citer toutes les hypothèses :

- **continuité** de f sur $[a, b]$;
- **positivité** de f sur $[a, b]$.

Propriété 6 (Inégalité triangulaire)

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a \leq b$, alors on a :

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt \qquad \textit{(Inégalité triangulaire).}$$

1.4 Techniques de calcul d'intégrales

Calcul direct

Méthode.
Si on trouve une primitive F de f grâce au tableau de primitives usuelles, alors on utilise la définition de l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exercice. Calculer les intégrales suivantes :

- $I = \displaystyle\int_1^3 (t^2 + 3t + 1)dt.$

- $J = \displaystyle\int_0^1 (2t+1)e^{t^2+t-1}dt$.

- $K = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$.

Intégration par parties

Théorème 7 (Intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions de **classe** $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dx.$$

Preuve.

$\square$

Méthode.

L'intérêt de l'intégration par parties est de passer de l'intégrale $\int_a^b u'(t)v(t)dt$ *à l'intégrale* $\int_a^b u(t)v'(t)dt$ *si cette dernière est plus simple à calculer que la première. Pour effectuer une intégration par parties :*

1. *on écrit la fonction dont on doit calculer l'intégrale sous la forme d'un produit de deux fonctions ;*
2. *on décide quelle fonction on dérive et quelle fonction on intègre :*
3. *on précise que les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$;*
4. *on applique la formule de l'intégration par parties à ces deux fonctions.*

Exercice. Calculer les intégrales suivantes :

- $I = \int_1^e t\ln(t)dt$.

- $J = \int_0^1 t^2 e^t dt$.

Changement de variable

Théorème 8 (Changement de variable)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et φ une fonction de **classe** $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, telle que $\varphi([a, b]) \subset I$. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$$

Preuve.

□

Méthode.

Pour faire un changement de variable $u = \varphi(t)$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$:

1. *on précise que le changement de variable φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$;*
2. *on change les bornes de l'intégrale : lorsque $t = a$, $u = \varphi(a)$ et lorsque $t = b$, $u = \varphi(b)$;*
3. *on exprime $f(t)$ uniquement en fonction de u,*
4. *à partir de l'égalité $du = \varphi'(t)dt$, on exprime dt uniquement en fonction de u et du ;*
5. *on applique la formule du changement de variable : $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$.*

Exercice. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{1+\sqrt{t}}$ en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

2 Intégrales généralisées

On souhaite généraliser la notion d'intégrale à un intervalle du type $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ ou $]-\infty, +\infty[$.

2.1 Intégrale généralisé d'une fonction continue

Définition.

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$.

- On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **impropre** ou **généralisée** en $+\infty$.
- L'**intégrale impropre** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **converge** si $\displaystyle\int_a^{x} f(t)dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ et on a alors :
$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^{x} f(t)dt.$$
- Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **diverge**.

On peut définir de la même façon l'intégrale impropre d'une fonction en $-\infty$.

Exercice. Vérifier si les intégrales généralisées suivantes sont convergentes et, le cas échéant, les calculer :

- $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

- $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$.

Définition.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

- On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est **impropre** ou **généralisée** en $-\infty$ et en $+\infty$,
- L'**intégrale impropre** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ **converge** s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ sont **toutes les deux convergentes**. Et dans ce cas,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{+\infty} f(t)dt.$$
- Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ ou $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ **diverge**, on dit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ **diverge**.

Remarque. La relation de Chasles nous assure que cette définition ne dépend pas du nombre $a \in \mathbb{R}$ choisi pour découper l'intégrale en deux intégrales généralisées sur $]-\infty, a]$ et $[a, +\infty[$. En pratique, on choisira le réel a qui nous arrange le plus.

Exercice. Vérifier si les intégrales généralisées suivantes sont convergentes et, le cas échéant, les calculer :

- $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2} dt.$

- $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt.$

Remarque. Dans toute la suite de ce chapitre, les propriétés sont énoncées pour des intégrales du type $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$. Elles restent valables pour des intégrales de la forme $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ ou $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

2.2 Propriétés des intégrales généralisées

Théorème 9 (Propriétés de l'intégrale)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonction continue sur $[a, +\infty[$.

(1) **Linéarité de l'intégrale** : Si les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ convergent, alors :

(a) Pour tous réels λ et μ, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t))dx$ converge.

(b) De plus, on a :

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t)dt + \mu \int_a^{+\infty} g(t)dt.$$

(2) **Relation de Chasles** : Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors :

(a) Pour tous $b \in [a, +\infty[$, $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(t)dt$ converge.

(b) De plus, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^{b} f(t)dt + \int_b^{+\infty} f(t)dt.$$

(3) **Positivité de l'intégrale** : Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et que $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, +\infty[$, alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \geq 0.$$

(4) **Intégration des inégalités** : Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ convergent et que $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a, +\infty[$, alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt.$$

Attention.

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} (f(t)+g(t))dt$ peut converger alors que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ divergent.
On ne peut donc pas scinder une intégrale généralisée en deux sans avoir vérifié au préalable que les deux intégrales obtenues convergent.

Exercice.

1. Vérifier que, pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$.

2. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)}$ converge et déterminer sa valeur.

3. Les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+1}$ convergent-elles ?
   A-t-on $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+1}$?

2.3 Techniques de calcul des intégrales généralisées

Attention.

On n'effectuera JAMAIS d'intégration par parties ou de changement de variable directement sur une intégrale généralisée.

Intégration par parties

Méthode.

Pour faire une intégration par parties sur une intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *:*

1. *on commence par faire cette intégration par parties sur un segment* $[a, x]$ *avec* $x \geq a$ *;*
2. *on fait ensuite tendre* x *vers* $+\infty$ *en veillant à bien justifier que toutes les limites considérées existent.*

Exercice.

- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ converge et donner sa valeur.

- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t}}{t^3}dt$ converge et donner sa valeur.

Changement de variable

Méthode.

Pour faire un changement de variable sur une intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *:*

1. *on commence par faire ce changement de variable sur un segment* $[a, x]$ *avec* $x \geq a$ *;*
2. *on fait ensuite tendre* x *vers* $+\infty$*.*

Exercice. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+e^t}$ converge et donner sa valeur. On pourra effectuer le changement de variable $u = e^t$.

Remarque. Les changements de variable affines, du type $u = \alpha t + \beta$, sont autorisés sur une intégrale généralisée et on a la certitude que l'intégrale de départ et celle d'arrivée sont de même nature.

Propriété 10 (Intégrales généralisées et parité)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(1) **Fonctions paires** :

- Si f est une fonction paire, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.
- En cas de convergence, on a :

$$\int_{-\infty}^0 f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

(2) **Fonctions impaires** :

- Si f est une fonction impaire, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.
- En cas de convergence, on a :

$$\int_{-\infty}^0 f(t)dt = -\int_0^{+\infty} f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0.$$

Preuve.

$\square$

Exercice. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$ converge et donner sa valeur.

3 Critères de convergence des intégrales généralisées

3.1 Intégrales de référence

Théorème 11 (Intégrales de référence)

(1) **Intégrale de Riemann** :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(2) **Intégrale d'une exponentielle** :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.

Preuve.

$\square$

3.2 Théorèmes de comparaison

Les résultats énoncés dans cette partie ne sont valables que pour des **fonctions positives**. Ils sont faux dans le cas général.

Propriété 12 (Intégrale généralisée d'une fonction positive)

Soit f une fonction continue et **positive** sur $[a,+\infty[$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est majorée.

Grâce à cette propriété, on en déduit les résultats suivants :

Théorème 13 (Comparaisons à l'aide d'inégalités)

Soient f et g deux fonctions définies, continues et **positives** sur un intervalle $[a,+\infty[$.
On suppose que, pour tout $t \in [a,+\infty[$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$.

(1) Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.

(2) Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge.

Théorème 14 (Comparaisons à l'aide des petits-o)

Soient f et g deux fonctions définies, continues et **positives** sur un intervalle $[a,+\infty[$.
On suppose que $f(t) \underset{+\infty}{=} o(g(t))$.

(1) Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.

(2) Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge.

Théorème 15 (Comparaisons à l'aide des équivalents)

Soient f et g deux fonctions définies, continues et **positives** sur un intervalle $[a,+\infty[$.
On suppose que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t)$. Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ sont de même nature :

(1) Si l'une converge, alors l'autre converge.

(2) Si l'une diverge, alors l'autre diverge.

Méthode.

Si une question porte seulement sur la nature de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *et pas sur sa valeur, alors il faut penser à utiliser l'un des théorèmes de comparaison :*

- *A l'aide d'une inégalité (si elle est évidente ou si elle est donnée par une question précédente) ;*
- *A l'aide d'un équivalent de* f *en* $+\infty$*. Si l'équivalent est une fonction de Riemann* $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$*, on peut alors conclure ;*
- *A l'aide des petits-o. On tente de montrer que* f *est négligeable par rapport une fonction de Riemann* $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ *en* $+\infty$*.*

Exercice. Étudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt.$

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt.$

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

3.3 Intégrales absolument convergentes

Définition.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ généralisée en $+\infty$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge.

Remarque. L'étude de la convergence absolue d'une intégrale généralisée permet de se ramener à l'intégrale d'une fonction positive et de pouvoir ainsi appliquer les théorèmes de comparaison du paragraphe précédent.

Théorème 16 (Intégrales absolument convergentes)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, +\infty[$.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **absolument convergente**, alors :

(1) L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.
En d'autres termes, la **convergence absolue** implique la **convergence**.

(2) De plus, on a :

$$\left|\int_a^{+\infty} f(t)dt\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)|\, dt \qquad \textit{(Inégalité triangulaire).}$$

Attention.

La réciproque de ce théorème est **fausse** : certaines intégrales peuvent converger sans converger absolument.