Chapitre 11

Probabilités sur un univers fini

Compétences attendues.

✓ Faire le lien entre connecteurs logiques et opérations sur les événements.

✓ Déterminer la probabilité d'un événement à l'aide des opérations sur les événements.

✓ Démontrer que des événements sont mutuellement indépendants.

✓ Reconnaitre une situation où il faut utiliser la formule des probabilités composées et savoir l'appliquer.

✓ Reconnaitre une situation où il faut utiliser la formule des probabilités totales, introduire le bon système complet d'événements, obtenir la formule et savoir l'appliquer.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Espaces probabilisables finis

1.1 Expériences aléatoires

Définition.

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend uniquement du hasard.

Exemple. Lors du lancer d'un dé, il n'est pas possible de prédire le résultat à l'avance avec certitude. Le lancer d'un dé est donc une **expérience aléatoire** (du latin alea qui signifie précisément dé).

- L'ensemble des résultats possibles de l'expérience, appelé l'**univers des possibles**, est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- On peut alors définir des **événements**, c'est-à-dire des propriétés relatives à l'expérience qui peuvent être vérifiées ou non.

  Par exemple, A : "le numéro obtenu est pair" et B : "le numéro obtenu est ≤ 2" sont deux événements.
- Un **événement** peut être identifié avec l'**ensemble des résultats** pour lesquels il est vérifié. Un **événement** est donc une **partie de l'univers** Ω, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.

  Par exemple, $A = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B = \{1, 2\} \in \mathcal{P}(\Omega)$.
- Un événement E est **réalisé** si le résultat ω de l'expérience vérifie E, c'est-à-dire si $\omega \in E$.

  Par exemple, les événements A et B sont réalisés si le résultat de l'expérience aléatoire est $\omega = 2$.

Nous allons formaliser toutes ces notions :

Définition.

On appelle **espace probabilisable fini** tout couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ où :

- Ω est un ensemble fini appelé **univers des possibles** ou plus simplement **univers**. C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des **événements**, c'est-à-dire l'ensemble des propriétés de l'expérience qui peuvent être vérifiées ou non.

Notation. Dans toute la suite du chapitre, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ **désignera un espace probabilisable fini**.

Définition.

- Un événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est **réalisé** si le résultat de l'expérience est un élément de A.
- Ω est appelé l'**événement certain**. $\emptyset$ est appelé l'**événement impossible**.
- Les singletons de $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$, c'est-à-dire les parties $\{\omega_i\}$ de Ω réduites à un élément, sont appelés **événements élémentaires**.
- Si $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont deux événements tels que $A \subset B$, alors on dit que A **implique** B (car la réalisation de A implique celle de B).

Exemple. Une urne contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. On tire successivement et avec remise 2 jetons.

1. Décrire l'univers des possibles Ω associé à cette expérience aléatoire.

2. On note A l'événement "les deux numéros obtenus sont pairs", B l'événement "les deux numéros obtenus sont impairs" et C l'événement "la somme des numéros obtenus est paire". Décrire les événements A, B et C. Quelles sont les relations d'inclusions entre ces événements ?

1.2 Opérations sur les événements

Définition.

Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements.

- L'événement $A \cap B$ est réalisé si et seulement si A **et** B sont réalisés.
- L'événement $A \cup B$ est réalisé si et seulement si l'un au moins des événements A **ou** B est réalisé.
- L'événement $\overline{A}$ (appelé événement contraire de A) est réalisé si et seulement si A ne l'est pas.

Exemple. On lance une pièce trois fois de suite. On note A l'événement "on obtient deux fois pile et une fois face" et B l'événement "les deux premiers lancers ont donné des résultats différents".

1. Décrire l'univers des possibles Ω associé à cette expérience aléatoire. On pourra par exemple écrire PPF pour désigner l'événement où on a fait deux piles puis un face.

2. Décrire les événements A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap \overline{B}$.

Les propriétés des opérations sur les événements sont les mêmes que celles décrites dans le chapitre sur les ensembles. Nous les rappelons ici :

Propriété 1 (Opérations sur les événements)

(1) L'intersection et l'union sont **commutatives** : Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A.$$

(2) L'intersection et l'union sont **associatives** : Pour tous $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C \quad \text{et} \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C.$$

(3) Ω est **élément neutre** pour l'intersection : Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \cap \Omega = A$.
$\emptyset$ est **élément neutre** pour la réunion : Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \cup \emptyset = A$.

(4) L'intersection et la réunion sont **distributives** l'une de l'autre : Pour tous $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(5) Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\overline{\overline{A}} = A$. De plus, $\overline{\emptyset} = \Omega$ et $\overline{\Omega} = \emptyset$.

(6) Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (Lois de Morgan).

Remarque. Considérons une famille de n événements $(A_k)_{1 \le k \le n}$. On peut généraliser :

1. Les définitions de l'intersection et l'union :
   - $\omega \in \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \omega \in A_k$,
   - $\omega \in \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n]\!],\ \omega \in A_k$.
2. Les lois de Morgan :

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k} \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$$

Exemple. Écrire, à l'aide des opérations sur les événements et à l'aide des événements A, B et C, les événements suivants :

- "L'un au moins des événements A, B, C est réalisé".

- "Tous les événements A, B, C sont réalisés".

- "L'un et l'un seulement des événements A ou B se réalise".

- "A et B se réalisent, mais pas C".

- "Deux évènements au plus se réalisent parmi les événements A, B, C".

1.3 Système complet d'événements

Définition.

- On dit que les deux événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$. Autrement dit, deux événements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément.
- Les événements d'une famille $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont **deux à deux incompatibles** si, pour tous $i \neq j$, A_i et A_j sont **incompatibles**.
- Une famille de n événements $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un **système complet d'événements** si les événements sont **deux à deux incompatibles** et si $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

Exemple. Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, proposer un système complet d'événements :

1. On considère un jeu de 32 cartes et on tire une carte au hasard.

2. Une urne contient une boule blanche, une verte et une rouge et on en tire 3 successivement avec remise.

3. Une urne contient 5 jetons numérotés de 1 à 5 et on en tire successivement 2 avec remise.

Propriété 2 (Décomposition d'un événement sur un système complet d'événements)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ un **système complet d'événements**. Alors, pour tout événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$B = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B)$$

et c'est une **union d'événements deux à deux incompatibles**.

Preuve.

□

2 Espaces probabilisés finis

2.1 Définition d'une probabilité

Définition.

On dit qu'une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ est une **probabilité** sur l'espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ si elle vérifie les conditions suivantes :

- $P(\Omega) = 1$.
- Si $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont **deux événements incompatibles**, c'est-à-dire tels que $A \cap B = \emptyset$, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Lorsqu'une telle application existe, on dit que le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un **espace probabilisé fini**.

Notation. Dans toute la suite du chapitre, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ **désignera un espace probabilisé fini**.

On peut généraliser par récurrence le deuxième point de la définition d'une probabilité :

Propriété 3 (Union d'événements deux à deux incompatibles)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de n **événements deux à deux incompatibles** (c'est-à-dire que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$). Alors :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Remarque. En notant $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ l'univers des possibles, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{m} P(\{\omega_k\}) = P\left(\bigcup_{k=1}^{m} \{\omega_k\}\right) = P(\Omega) = 1.$$

On a également, pour tout événement A, $P(A) = \sum_{\omega_k \in A} P(\{\omega_k\})$.

Exemple. Un dé cubique, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, est tel que, lorsqu'on le lance, le 6 sort une fois sur deux alors que les autres numéros ont autant de chances d'apparaître. On lance ce dé.
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

2.2 Cas particulier : l'équiprobabilité

Définition.

Considérons toujours un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$. On dit qu'il y a **équiprobabilité** si les événements élémentaires ont tous la même probabilité, c'est-à-dire si :

$$\forall i, j \in [\![1, m]\!],\ P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\}).$$

Dans ce cas, compte tenu de la relation $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} P(\{\omega_k\}) = 1$, on a :

$$\forall k \in [\![1, m]\!],\ P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{m} = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

Exemple. Déterminer pour chacune des expériences suivantes si on est en situation d'équiprobabilité ?

1. On lance une pièce équilibré.

2. On lance un dé équilibré avec 4 faces rouges et 2 faces noires.

3. On extrait au hasard une boule d'une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10.

4. On extrait au hasard une boule d'une urne contenant 5 boules blanches et 7 boules noires.

Théorème 4 (Équiprobabilité)

Dans le cas de l'**équiprobabilité**, la probabilité d'un événement quelconque A est donnée par :

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} \quad \text{ou encore} \quad P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exemple. Déterminer la probabilité qu'au moins deux étudiants de la classe d'ECE1 soient nés le même jour (on ne prendra pas en compte les années bissextiles).

2.3 Propriétés d'une probabilité

Propriété 5 (d'une probabilité)

(1) Pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. En particulier, $P(\emptyset) = 0$.

(2) Si $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont deux événements tels que $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

(3) Si $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont deux événements, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(4) Si $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont trois événements, alors :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - (P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Preuve.

$\square$

Exemple. Soient A, B et C trois événements tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} P(A)=0.3 \\ P(B)=0.4 \\ P(C)=0.6 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{l} P(A\cup B)=0.6 \\ P(\overline{A}\cup\overline{C})=0.9 \\ P(\overline{B}\cup\overline{C})=0.8 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad P(A\cap B\cap C)=0.05.$$

Quelle est la probabilité que se réalise l'un des événements A, B ou C ?

3 Conditionnement

3.1 Probabilités conditionnelles

Théorème 6 (Probabilités conditionnelles)

Soit A un événement tel que $P(A)\neq 0$. On considère l'application $P_A : \mathcal{P}(\Omega)\to[0,1]$ définie pour tout $B\in\mathcal{P}(\Omega)$ par :

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

Alors P_A est une probabilité, appelée **probabilité conditionnelle** et on dit que le réel $P_A(B)$ est la **probabilité de B sachant A**.

Exemple. On tire successivement deux boules sans remise dans une urne qui contient 3 boules blanches et 5 boules noires.
On note B_i l'événement "on obtient une boule blanche au i-ième tirage" et N_i l'événement "on obtient une boule noire au i-ième tirage".

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au premier tirage ?

2. En déduire la probabilité d'obtenir une boule noire au premier tirage et une boule blanche au deuxième tirage.

3.2 Formule des probabilités composées

Théorème 7 (Formule des probabilités composées)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille de n événements telle que $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$. Alors :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\ldots P_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Preuve.

$\square$

Méthode.
On utilisera cette formule pour des événements $A_1, \ldots, A_n$ qui se produisent de façon successive dans le temps. C'est en sachant que A_1 est réalisé qu'on peut déterminer $P_{A_1}(A_2)$, puis en sachant que A_1 et A_2 sont réalisés qu'on peut déterminer $P_{A_1\cap A_2}(A_3)$ et ainsi de suite.

Exemple. Jean-Louis a un trousseau de n clefs. Une seule ouvre la porte de son appartement. Il essaye chaque clef une fois jusqu'à ouvrir la porte. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement "la i-ème clef ouvre la porte". Quel est la probabilité que la k-ième clef ouvre la porte ?

3.3 Formule des probabilités totales

Théorème 8 (Formule des probabilités totales)

Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement dont on cherche à calculer sa probabilité. Lorsqu'on ressent un manque d'information pour obtenir $P(B)$ directement, on utilisera la démarche suivante :

(1) On **introduit un système complet d'événements** $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ bien choisi pour lever le manque d'information sur l'événement B.

(2) On **décompose l'événement** B **sur le système complet d'événements** $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$:

$$B = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B)$$

(3) Comme c'est une **union d'événements deux à deux incompatibles**, on obtient :

$$P(B) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B)\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B).$$

(4) De plus, si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(A_k) \neq 0$, alors avec la **formule des probabilités composées**, on obtient :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B).$$

Méthode.
On utilisera cette formule lorsqu'on effectue une expérience aléatoire en plusieurs étapes. Elle permet de raisonner par disjonction des cas, suivant le résultat de l'étape précédente, pour déterminer la probabilité à l'étape suivante.

Exemple. Une urne contient 3 boules vertes, 2 boules blanches et 1 boule rouge. On effectue deux tirages successifs et sans remise.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule rouge au deuxième tirage ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule rouge au deuxième tirage ?

4 Indépendance

4.1 Indépendance de deux événements

Définition.

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Attention.

Il ne faut surtout pas confondre **incompatibilité** et **indépendance** :

1. A et B sont incompatibles : notion intrinsèque aux événements A et B (ne dépend pas de la probabilité P).

2. A et B sont indépendants : notion qui dépend de la probabilité P.

Exemple. On lance deux fois un dé équilibré et on considère les trois événements suivants :

A : "la somme des 2 lancers est égale à 6".

B : "la somme des 2 lancers est égale à 7".

C : "le premier lancer a donné un 4".

Étudier l'indépendance de A et C, puis celle de B et C.

Propriété 9 (sur l'indépendance de deux événements)

Soient A et B deux événements.

(1) Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

(2) Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Preuve.

$\square$

4.2 Indépendance mutuelle

Définition.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille de n événements.
Les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dits **mutuellement indépendants** si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour toute famille d'indices $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k}).$$

Exemple. Pour $n = 3$. Les événements A, B, C sont mutuellement indépendants si :
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$,
$P(A \cap C) = P(A)P(C)$,
$P(B \cap C) = P(B)P(C)$,
$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

Remarque. Lorsqu'on répète n fois la même expérience aléatoire dans les mêmes conditions, les résultats de ces n expériences sont **mutuellement indépendants**. Plus précisément, si A_k est un événement lié à la k-ème épreuve, alors les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants**.

Exemple. On lance n fois une pièce de monnaie amenant pile avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$). Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note P_k l'événement "pile apparait au k-ième lancer" et A l'événement "le premier pile arrive au n-ième lancer".

1. Exprimer A à l'aide des événements P_k.

2. En déduire $P(A)$.

Propriété 10 (Indépendance mutuelle d'événements)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille de n événements **mutuellement indépendants**.

(1) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons B_k l'événement égale soit à A_k soit à $\overline{A_k}$. Alors $(B_k)_{1\leq k\leq n}$ est aussi une famille de n événements **mutuellement indépendants**.

(2) Tout événement formé avec certains événements de la famille $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est **indépendant** de tout événement formé à partir d'autres événements de $(A_k)_{1\leq k\leq n}$.