Chapitre 11

Variables aléatoires à densité

1 Généralités sur les variables aléatoires **2**
- 1.1 Définition 2
- 1.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire . . 2
- 1.3 Indépendance de variables aléatoires 3
- 1.4 Propriétés de l'espérance et de la variance 4
- 1.5 Variables aléatoires centrées réduites 5

2 Variables aléatoires à densité **6**
- 2.1 Définition 6
- 2.2 Densité de probabilité 7
- 2.3 Calcul de probabilités 8
- 2.4 Transformée d'une variable aléatoire à densité . . . 12

3 Moments d'une variable aléatoire à densité **14**
- 3.1 Espérance d'une variable aléatoire à densité 14
- 3.2 Variance d'une variable aléatoire à densité 15

4 Cas discret/cas continu **18**

Compétences attendues.

- ✓ Montrer qu'une fonction f est une densité de probabilité.
- ✓ Déterminer une densité d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition et réciproquement.
- ✓ Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire $Y = g(X)$.
- ✓ Prouver qu'une variable aléatoire X est à densité.
- ✓ Prouver l'existence et calculer l'espérance ou la variance d'une variable à densité.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECG au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

Dans tout ce chapitre, les variables aléatoires sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1 Généralités sur les variables aléatoires

1.1 Définition

Définition.

Une **variable aléatoire** sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (X \leq x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathscr{A}.$$

L'ensemble des valeurs que peut prendre X est appelé le **support** de X et est noté $X(\Omega)$.

Remarque. Si X est une variable aléatoire, alors pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\} \in \mathscr{A}$.
En particulier, les ensembles suivants sont des événements : $(X \leq x)$, $(X \geq x)$, $(X < x)$, $(X > x)$, $(X = x)$, $(x \leq X \leq y)$, $(x \leq X < y)$, $(x < X \leq y)$, $(x < X < y)$.

Propriété 1 (Opérations sur les variables aléatoires)

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et λ un nombre réel.
Alors $X + Y$, λX, XY, $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$ sont aussi des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition.

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X est la fonction F_X définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x).$$

La donnée de la **fonction de répartition** d'une variable aléatoire caractérise sa loi.

Propriété 2 (de la fonction de répartition)

Soient X une variable aléatoire, F_X sa fonction de répartition et $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Alors :

$$P(X > x) = 1 - F_X(x) \qquad \text{et} \qquad P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x).$$

Preuve.

□

Théorème 3 (Caractérisation d'une fonction de répartition)

Soient X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition. Alors :

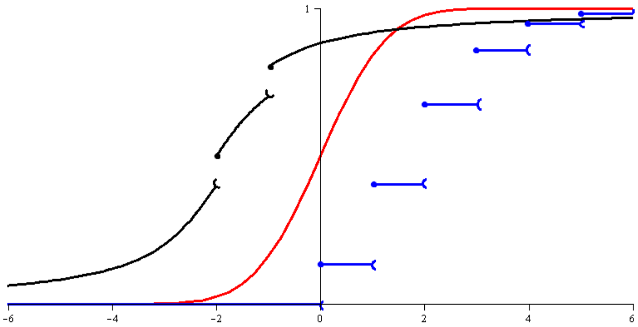
(1) F_X est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

(2) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

(3) F_X est **continue à droite** en tout point de $\mathbb{R}$.

Réciproquement, toute fonction F vérifiant ces trois propriétés est une fonction de répartition, c'est-à-dire qu'il existe X une variable aléatoire dont F est la fonction de répartition.

Exemple. Les trois applications suivantes sont des fonctions de répartition de variables aléatoires :



En effet, elles sont toutes les trois croissantes, continues à droite en tout point de $\mathbb{R}$ et elles sont bien de limites 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$.

Propriété 4 (Continuité à gauche d'une fonction de répartition)

Soient X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition. Alors :

(1) F_X admet une limite finie à gauche en tout point $x \in \mathbb{R}$. De plus, on a l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F_X(x) - \lim_{t \to x^-} F_X(t).$$

(2) F_X est continue à gauche (et donc continue) en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $P(X = x) = 0$.

1.3 Indépendance de variables aléatoires

Définition.

- **Indépendance de deux variables aléatoires :**
  Deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si pour tous intervalles $I, J \subset \mathbb{R}$, les événements $(X \in I)$ et $(Y \in J)$ sont indépendants :
  $$P((X \in I) \cap (Y \in J)) = P(X \in I) \times P(Y \in J).$$
- **Indépendance d'une famille finie de variables aléatoires :**
  Les n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si pour tous intervalles $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$, les événements $(X_1 \in I_1), \ldots, (X_n \in I_n)$ sont mutuellement indépendants :
  $$P((X_1 \in I_1) \cap \ldots \cap (X_n \in I_n)) = P(X_1 \in I_1) \times \ldots \times P(X_n \in I_n).$$
- **Indépendance d'une suite de variables aléatoires :**
  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires **mutuellement indépendantes** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes**.

Remarque. On pourra adapter cette définition pour obtenir la notion d'indépendance deux à deux pour une famille finie ou une suite de variables aléatoires.

Propriété 5 (Lemme des coalitions)

Soient n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ **mutuellement indépendantes**.

(1) Si $f_1, \ldots, f_n$ sont n fonctions, alors $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ sont n variables aléatoires **mutuellement indépendantes**.

(2) Si Y est une variable aléatoire ne dépendant que de $X_1, \ldots, X_p$ et si Z est une variable aléatoire ne dépendant que de $X_{p+1}, \ldots, X_n$, alors Y et Z sont **indépendantes**.

1.4 Propriétés de l'espérance et de la variance

Les propriétés de l'espérance et de la variance déjà vues dans le cas discret peuvent se généraliser :

Propriété 6 (de l'espérance)

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant une espérance.

(1) **Linéarité** : Pour tous réels λ et μ, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

En particulier, pour tous réels a et b, la variable aléatoire $aX + b$ admet une espérance et

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

(2) **Positivité** : Si $X \geq 0$ presque sûrement, alors $E(X) \geq 0$.

(3) **Croissance** : Si $X \leq Y$ presque sûrement, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Propriété 7 (Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes)

(1) Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** admettant une espérance, alors XY admet une espérance, et on a :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

(2) Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires **mutuellement indépendantes** admettant une espérance alors $X_1 \times \ldots \times X_n$ admet une espérance, et on a :

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i).$$

Propriété 8 (de la variance)

Si X est une variable aléatoire admettant une variance et $a, b \in \mathbb{R}$, alors $aX + b$ admet une variance et on a :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

En particulier, la variance **n'est pas linéaire**.

Propriété 9 (Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes)

(1) Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** admettant une variance, alors $X+Y$ admet une variance, et on a :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

(2) Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires **mutuellement indépendantes** admettant une variance, alors $X_1 + \ldots + X_n$ admet une variable, et on a :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i).$$

Remarque. Ces propriétés sont valables pour des variables aléatoires discrètes, à densité, ou quelconque. Cependant, concernant les variables aléatoires quelconques, on ne sait pas, en filière ECG, exprimer la notion d'espérance/variance. On joue donc un peu les apprentis sorciers en énonçant ces résultats !

1.5 Variables aléatoires centrées réduites

Définition.

Soit X une variable aléatoire.

- Si X admet une espérance et si $E(X) = 0$, alors X est dite **centrée**.
- Si X admet une variance et si $V(X) = 1$, alors X est dite **réduite**.
- Si X admet une espérance nulle et une variance égale à 1, alors X est dite **centrée réduite**.

Propriété 10 (Variables aléatoires centrées réduites)

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance et une variance **non nulle**. Alors on a :

(1) $X - E(X)$ est **centrée** ;

(2) $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ est **centrée réduite**.

On dit que X^* est la **variable aléatoire centrée réduite** associée à X.

Preuve.

$\square$

2 Variables aléatoires à densité

Parmi l'ensemble des variables aléatoires, nous allons nous intéresser à celles dites "à densité" car la notion de densité nous permet d'obtenir des formules de calculs simples (d'espérances, de variances...).

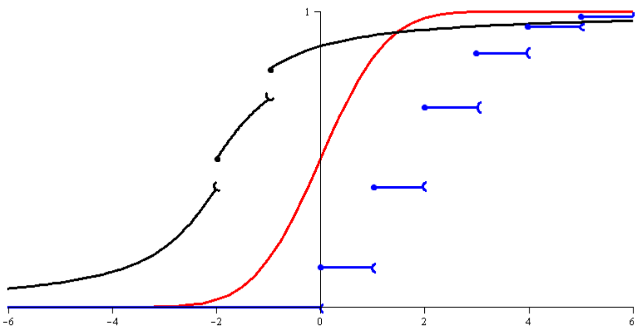
2.1 Définition

Définition.

Soient X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition.
On dit que X est une **variable aléatoire à densité** si :

- F_X est **continue** sur $\mathbb{R}$.
- F_X est de **classe** $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Exemple. On a vu que les trois courbes suivantes sont celles de fonctions de répartition de variables aléatoires :



- La courbe bleue est en escalier. C'est donc la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X. Rappelons qu'elle est constante entre deux valeurs successives de $X(\Omega)$ et discontinue à droite en tout point de son support $X(\Omega)$. En particulier, une variable discrète n'est donc pas à densité.
- La courbe rouge représente une fonction de répartition (celle de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. C'est donc la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
- La courbe noire représente une fonction qui est discontinue en certains points et qui n'est pas en escalier. C'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui est ni discrète, ni à densité.

Méthode.

Pour montrer qu'une variable aléatoire est à densité, on vérifie que sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Exercice. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F_X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Montrer que X est une variable aléatoire à densité.

2.2 Densité de probabilité

Définition.

Soit X une variable à densité.
On appelle **densité de probabilité de** X toute fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- f_X est positive sur $\mathbb{R}$;
- $f_X(x) = F'_X(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

Remarque. Une densité d'une variable aléatoire n'est pas unique : si f_X est une densité de X et si l'on change la valeur de f_X en un nombre fini de points (en prenant pour nouvelles valeurs des réels positifs), alors on obtient une autre densité de X. On parlera donc pour f_X d'**UNE** densité de X et non de **LA** densité de X.

Méthode.

Étant donnée la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire à densité X, on détermine une densité f_X de X en dérivant F_X.

Exercice. Soit X une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition F_X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Déterminer une densité f_X de X.

Théorème 11 (Propriétés d'une densité)

Une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une **densité** d'une variable aléatoire X si et seulement si :

(1) f_X est **continue** sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points ;

(2) f_X est à **valeurs positives** sur $\mathbb{R}$;

(3) L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt$ **converge et vaut** 1.

Méthode.

Pour montrer qu'une fonction f est une densité, on vérifie que :

- *f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue sauf éventuellement en un nombre fini de points.*
- *f est à valeurs positives.*
- *$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut à 1.*

Exercice. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est une densité.

2.3 Calcul de probabilités

Théorème 12 (Lien fonction de répartition/densité)

Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X et F_X sa fonction de répartition. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

En particulier, la donnée d'**une densité caractérise la loi** : si X et Y sont deux variables à densité de densités respectives f_X et f_Y, alors elles ont même loi si et seulement si $f_X = f_Y$ sauf en un nombre fini de points.

Preuve.

□

Méthode.

Étant donnée une densité f_X d'une variable aléatoire à densité X, on détermine la fonction de répartition F_X de X en intégrant f_X :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Exercice. Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

Propriété 13 (Lien probabilités/densité)

Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X et F_X sa fonction de répartition.

(1) Pour tout réel x, $P(X = x) = 0$.

(2) Pour tous réels $x < y$,

$$P(x \leq X \leq y) = P(x < X \leq y) = P(x \leq X < y) = P(x < X < y)$$

On a ainsi la formule :

$$P(x \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(x) = \int_x^y f_X(t)dt.$$

En particulier, cette probabilité s'interprète comme l'aire sous la courbe représentative de la densité f_X entre x et y.

Preuve.

□

Attention.
Ces propriétés sont uniquement vraies dans le cas où X est une variable à densité. Elles sont bien évidement **fausses** lorsque X est une variable aléatoire **discrète**.

Exercice. Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)$, $P\left(X \geq \frac{1}{4}\right)$ et $P\left(-2 \leq X \leq \frac{1}{3}\right)$.

Remarque. Soit X une variable à densité, f_X une densité de X et F_X sa fonction de répartition.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $h > 0$ petit, on a :

$$P(x-h \leq X \leq x+h) = F_X(x+h) - F_X(x-h) = \int_{x-h}^{x+h} f_X(t)dt \approx 2h \cdot f_X(x).$$

La quantité $2h \cdot f_X(x)$ représente donc approximativement la probabilité que X soit proche de x à la précision h. Ainsi, plus la densité au point x est élevée, plus la probabilité d'obtenir une valeur proche de x est forte.

Cette remarque justifie la définition suivante :

Définition.

Soit X une variable à densité et f_X une densité de X. On appelle **support** de X l'ensemble

$$X(\Omega) = \{t \in \mathbb{R} \mid f_X(t) > 0\}.$$

Cet ensemble, ainsi défini, dépend de la densité f_X choisie pour X.

Remarque. En notant $m = \inf(X(\Omega))$ et $M = \sup(X(\Omega))$ (dans le cas où l'ensemble $X(\Omega)$ est minoré et majoré), on a :

$$\forall x \leq m, \quad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

et

$$\forall x \geq M, \quad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = 1.$$

On retiendra donc que F_X est toujours nulle avant le support $X(\Omega)$ et égale à 1 après le support $X(\Omega)$.

2.4 Transformée d'une variable aléatoire à densité

Propriété 14 (Transformée d'une variable aléatoire)

Soit X une variable aléatoire et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. Alors l'application

$$g(X) : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & g(X(\omega)) \end{array} \right.$$

est encore une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et on dit que c'est la **transformée** de la variable aléatoire X par g.

Exemple. Si X est une variable aléatoire, alors $aX + b$, X^2, $|X|$, e^X, ... sont des variables aléatoires.

Question. Si X est à densité, est-ce que $g(X)$ est encore à densité ? La réponse est non en général, et il nous faudra le vérifier au cas par cas. Pour cela, nous procéderons comme suit :

Méthode.

Pour montrer que $Y = g(X)$ est une variable aléatoire à densité, on procède de la manière suivante :

1. ***Recherche de $Y(\Omega)$:***

   On détermine le support $Y(\Omega)$ à partir de celui de X, afin de trouver sans calcul à quels endroits F_Y vaut 0 ou 1.

2. ***Détermination de F_Y :***

   On revient à la définition $F_Y(x) = P(Y \leq x)$ puis on exprime F_Y en fonction de F_X.

3. ***Justification que Y est à densité :***

   On étudie la continuité de F_Y sur $\mathbb{R}$ et son caractère $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement d'un nombre fini de points. On conclut ainsi que Y est à densité.

4. ***Calcul d'une densité de Y :***

   On dérive F_Y aux points où c'est possible pour obtenir une densité de Y. On prendra des valeurs arbitraires (positives) aux points où F_Y n'est pas dérivable.

Propriété 15 (Transfomée affine d'une variable aléatoire à densité)

Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X et $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.
La variable aléatoire $Y = aX + b$ est à densité et une densité f_Y de Y est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Preuve.

□

3 Moments d'une variable aléatoire à densité

3.1 Espérance d'une variable aléatoire à densité

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité de densité f_X.
On dit que X admet une **espérance** si l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt$ converge absolument.
Dans ce cas, on appelle **espérance de** X et on note $E(X)$ le réel défini par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt.$$

Remarque. Puisque $t \mapsto tf_X(t)$ est de signe constant sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$, on a l'équivalence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt \text{ converge absolument} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt \text{ converge}$$

Ainsi, pour montrer que X admet une espérance, il suffit de montrer la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt$.

Exercice. Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Propriété 16 (de l'espérance)

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant une espérance et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(1) **Linéarité** : La variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

(2) **Positivité** : Si $X \geq 0$ presque sûrement, alors $E(X) \geq 0$.

(3) **Croissance** : Si $X \leq Y$ presque sûrement, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Théorème 17 (de transfert)

Si X est une variable aléatoire admettant une densité f_X et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Alors la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t)dt$ est **absolument convergente**, et dans ce cas :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t)dt.$$

Propriété 18 (de l'espérance)

Soit X une variable aléatoire à densité **admettant une espérance** et a et b deux réels. Alors la variable aléatoire $aX + b$ **admet une espérance** et

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Preuve.

□

3.2 Variance d'une variable aléatoire à densité

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X et $r \in \mathbb{N}^*$.
On dit que X admet **moment d'ordre** r si X^r admet une espérance. Par le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)dt \quad \text{converge absolument.}$$

Dans ce cas, on note $m_r(X) = E(X^r)$.

Propriété 19 (Moments d'une variable aléatoire à densité)

Soit X une variable aléatoire à densité.

(1) Si X admet un moment d'ordre r, alors elle admet un moment de tout ordre $s \leq r$.

(2) En particulier, si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité et f_X une densité de X.
Si X admet une **espérance** et si $(X - E(X))$ admet un **moment d'ordre** 2, alors on dit que X admet une **variance** notée $V(X)$ et définie par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f_X(t) dt.$$

Propriété 20 (de la variance)

Si X est une variable aléatoire à densité admettant une variance, alors $V(X) > 0$.
On appelle **écart-type** de X, et on note $\sigma(X)$, le réel défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Preuve.

$\square$

Théorème 21 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance.
Alors X admet une **variance** si et seulement si X admet un **moment d'ordre** 2, et dans ce cas :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Exercice. Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que X admet une variance et la calculer.

Propriété 22 (de la variance)

Soit X une variable aléatoire à densité **admettant une variance** et $a, b \in \mathbb{R}$.
Alors $aX + b$ **admet une variance** et :

$$V(aX+b) = a^2 V(X).$$

4 Cas discret/cas continu

On termine ce chapitre en faisant le parallèle entre les notions vues dans le cas des variables aléatoires discrètes et dans le cas des variables aléatoires à densité :

Cas discret	Cas continu
$\displaystyle\sum_{x_k \in X(\Omega)} P(X = x_k) = 1$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = 1$
$\displaystyle P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x_k \leq b} P(X = x_k)$	$\displaystyle P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(t)dt$
$\displaystyle F_X(x) = \sum_{x_k \leq x} P(X = x_k)$	$\displaystyle F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$
$\displaystyle E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k)$	$\displaystyle E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)dt$
$\displaystyle E(g(X)) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} g(x_k) P(X = x_k)$	$\displaystyle E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t)dt$
$\displaystyle E(X^r) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k^r P(X = x_k)$	$\displaystyle E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)dt$
$\displaystyle V(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} (x_k - E(X))^2 P(X = x_k)$	$\displaystyle V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f_X(t)dt$