Chapitre 12

Applications linéaires

Compétences attendues.

- ✓ Montrer qu'une application est linéaire.
- ✓ Montrer qu'une application linéaire est un endomorphisme.
- ✓ Trouver le noyau et l'image d'une application linéaire.
- ✓ Montrer qu'une application linéaire est injective ou surjective.
- ✓ Connaître et savoir utiliser le théorème du rang.
- ✓ Montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme ou un automorphisme.
- ✓ Déterminer la matrice d'une application linéaire.
- ✓ Déterminer matriciellement le noyau, l'image et le rang d'une application linéaire.
- ✓ Connaitre et savoir utiliser la formule de changement de bases.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECG au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

Dans tout ce chapitre, E et F désigneront deux espaces vectoriels.

1 Généralités sur les applications linéaires

1.1 Définitions

Définition.

Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si :

$$\forall u, v \in E,\ f(u+v) = f(u) + f(v) \qquad \text{et} \qquad \forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u).$$

On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemples.

- L'application nulle $N : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ u & \mapsto & 0_F \end{array} \right.$ est linéaire.
- L'application identité $Id_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & u \end{array} \right.$ est linéaire.
- La transposition $t : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array} \right.$ est linéaire.
- L'application $f_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(a) \end{array} \right.$ d'évaluation en $a \in \mathbb{R}$ d'un polynôme est linéaire.
- La dérivation $D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$ est linéaire.
- L'intégration $I_{a,b} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f(x)dx \end{array} \right.$ est linéaire.

Propriété 1 (Caractérisation des applications linéaires)

Soit $f : E \to F$ une application. f est une **application linéaire** si et seulement si

$$\forall u, v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda \cdot u + v) = \lambda \cdot f(u) + f(v).$$

Méthode.

Pour montrer que $f : E \to F$ est linéaire, on prouve que pour tout $u, v \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda \cdot u + v) = \lambda \cdot f(u) + f(v).$$

Exercice. Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + 2y, 2x + 4y) \end{array} \right.$ est linéaire.

Attention.
Il ne faut pas confondre les méthodes pour montrer que :

- F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E ;
- f est une application linéaire de E dans F.

En particulier, dire qu'une application est "stable par combinaisons linéaires" ne veut rien dire. Un sous-espace vectoriel est stable par combinaisons linéaires, une application linéaire est juste... linéaire !

Propriété 2 (d'une application linéaire)

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

(1) $f(0_E) = 0_F$.

(2) Pour tous $p \in \mathbb{N}^*$, $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, on a :

$$f(\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_p \cdot u_p) = \lambda_1 \cdot f(u_1) + \ldots + \lambda_p \cdot f(u_p).$$

Autrement dit, l'image par f d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

Preuve.

□

Définition.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- Si $E = F$, on dit que f est un **endomorphisme**.
- Si f est bijective, on dit que f est un **isomorphisme**.
- Si $E = F$ et si f est bijective, on dit que f est un **automorphisme**.

Notation. On notera $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Exemples. Id_E est un endomorphisme de E, la transposition t est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'application linaire f de l'exercice précédent est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Propriété 3 (Structure algébrique de $\mathscr{L}(E, F)$)

$\mathscr{L}(E, F)$ est un espace vectoriel. En particulier :

(1) Si $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $f + g \in \mathscr{L}(E, F)$.

(2) Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \cdot f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Preuve.

□

Propriété 4 (Composition d'applications linéaires)

Soient E, F et G des espaces vectoriels.
Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E, G)$.

Preuve.

□

Propriété 5 (Application réciproque)

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$.

Preuve.

□

Propriété 6 (Composition d'isomorphismes)

Soient E, F et G des espaces vectoriels.
Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ sont deux isomorphismes, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$ est aussi un isomorphisme et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.3 Noyau d'une application linéaire

Définition.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle **noyau** de f le sous-ensemble de E noté $\mathrm{Ker}(f)$ défini par :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}.$$

Théorème 7 (Structure algébrique du noyau)

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :

$\mathrm{Ker}(f)$ est un **sous-espace vectoriel** de E.

Preuve.

$\square$

Méthode.

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire $f : E \to F$, on cherche les vecteurs u tels que $f(u) = 0_F$ en résolvant un système linéaire homogène.

Exercice. Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes :

- $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, 2x+4y) \end{array} \right.$

- $t : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array} \right.$

Propriété 8 (Caractérisation de l'injectivité par le noyau)

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :

$$f \text{ est } \textbf{injective} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

Preuve.

□

Méthode.

Pour montrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est injective, on cherche son noyau. L'application f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0_E\}$.

Exemples.

- L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, 2x+4y) \end{array} \right.$ n'est pas injective car $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
- L'application $t : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array} \right.$ est injective car $\operatorname{Ker}(t) = \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\}$.

1.4 Image d'une application linéaire

Définition.

Soit $f \in\in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle **image** de f le sous-ensemble de F noté $\operatorname{Im}(f)$ défini par :

$$\operatorname{Im}(f) = \{v \in F \mid \exists u \in E,\ v = f(u)\} = \{f(u) \mid u \in E\}.$$

Théorème 9 (Structure algébrique de l'image)

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

Im(f) est un **sous-espace vectoriel** de F.

Preuve.

$\square$

Exercice. Déterminer l'image des applications linéaires suivantes :

- $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + 2y, 2x + 4y) \end{array} \right.$

- $t : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array} \right.$

Propriété 10 (Caractérisation de la surjectivité par l'image)

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

$$f \text{ est } \textbf{surjective} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$$

Preuve.

$\square$

Méthode.

Pour montrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est surjective, on cherche son image. L'application f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.

Exemples.

- L'application $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + 2y, 2x + 4y) \end{array} \right.$ n'est pas surjective car $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^2$.
- L'application $t : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array} \right.$ est surjective car $\mathrm{Im}(t) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Comme t est aussi injective, t est bijective et c'est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Applications linéaires en dimension finie

On suppose dans cette partie que E est un espace vectoriel de dimension finie.

2.1 Image d'une base par une application linéaire

Propriété 11 (Image d'une base par une application linéaire)

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de F.
Il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_i) = x_i$ pour tout $1 \leq i \leq p$.
De plus, on a :

- f est injective si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre.
- f est surjective si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice.
- f est bijective si et seulement si $\mathscr{F}$ est une base.

Remarques. On en déduit que :

- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.
- Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Propriété 12 (Famille génératrice de l'image)

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Alors $\text{Im}(f)$ est le sous-espace vectoriel de F engendré par la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$. Autrement dit :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right).$$

Preuve.

□

Méthode.

Pour déterminer l'image d'une application linéaire $f : E \to F$, on considère une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E (en général la base canonique de E) et on détermine $Im(f) = Vect(f(e_1), \ldots, f(e_p))$.

Exercice. Retrouver l'image de $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, 2x+4y) \end{array} \right.$ à l'aide de la propriété précédente.

2.2 Rang d'une application linéaire

Définition.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle **rang** de f et on note $\mathrm{rg}(f)$ la dimension de l'image de f :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Exercice. Donner le rang de $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, 2x+4y) \end{array} \right.$.

Propriété 13 (Rang d'une application linéaire)

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E, alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), \ldots, f(e_p))$.

Preuve.

□

Théorème 14 (du rang)

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On a :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f).$$

Exercice. Vérifier que le théorème du rang est valable pour $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, 2x+4y) \end{array} \right.$.

2.3 Caractérisation des isomorphismes

Théorème 15 (Caractérisation des isomorphismes)

On suppose que E et F sont de **même dimension finie**, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Il y a équivalence entre :

(1) f est bijective ; (2) f est injective ; (3) f est surjective.

Attention.
Il faut bien préciser que $\dim(E) = \dim(F)$ avant d'utiliser ce résultat. Sans cette condition, il est faux en général (voir l'**Exercice 7** du TD 12 pour un contre-exemple).

Preuve.

$\square$

Méthode.
Si $f : E \to F$ est une application linéaire et $\dim(E) = \dim(F)$, alors il suffit de montrer que f est injective ou que f est surjective pour prouver que f est bijective.

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$.
Montrer que f est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Propriété 16 (Caractérisation des isomorphismes)

On suppose que E et F sont de **même dimension finie**, et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Il y a équivalence entre :

(1) f est bijective ; (2) $\exists g \in \mathscr{L}(F,E),\ g \circ f = Id_E$; (3) $\exists h \in \mathscr{L}(F,E),\ f \circ h = Id_F$.

De plus, on a alors $f^{-1} = g = h$.

Attention.

Ici aussi, il faut bien préciser que $\dim(E) = \dim(F)$ avant d'utiliser ce résultat. C'est là encore faux en général (voir l'**Exercice 7** du TD 12 pour un contre-exemple).

Propriété 17 (Isomorphismes et dimension)

On suppose que E et F sont de dimension finie.
S'il existe un isomorphisme $f : E \to F$, alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Preuve.

□

3 Applications linéaires et matrices

Dans cette dernière partie, on suppose que E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie.

3.1 Matrice d'une application linéaire

Définition.

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.
On appelle **matrice de** $f \in \mathscr{L}(E,F)$ **dans les bases** $\mathscr{B}$ **et** $\mathscr{C}$, notée $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, la matrice $(a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ où pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, la j-ième colonne contient les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$:

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{c} \\ f_1 \to \\ f_2 \to \\ \vdots \\ f_n \to \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{où} \quad \forall j \in [\![1,p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot f_i.$$

Remarque. $\dim(E)$ = nombre de colonne de la matrice, $\dim(F)$ = nombre de lignes de la matrice.

Exercice. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+z, x-z) \end{array} \right.$ une application linéaire. Déterminer $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ lorsque :

1. $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2. $\mathscr{B} = ((1,1,-1),(-1,1,1),(1,-1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C} = ((1,1),(-1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Cas d'un endomorphisme. Lorsque $E = F$, on prend la même base au départ et à l'arrivée $\mathscr{B} = \mathscr{C}$ et pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, on note plus simplement $M_{\mathscr{B}}(f) = M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Exemple. Pour toute base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, on a : $M_{\mathscr{B}}(Id_E) = I_n$.

Exercice. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (3x+y-2z, y+z, 2z) \end{array} \right.$ un endomorphisme. Déterminer $M_{\mathscr{B}}(f)$ lorsque :

1. $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. $\mathscr{B} = ((1,0,0),(1,-2,0),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 18 (Rang d'une application linéaire et de sa matrice)

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F.
Le rang de l'application linéaire f est égal au rang de sa matrice $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

Preuve.

□

3.2 Opérations

Propriété 19 (Combinaisons linéaires et composées)

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$.

(1) Si $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) + \mu \cdot M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g).$$

(2) Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors on a :

$$M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = M_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f).$$

Attention.
En général $g \circ f \neq f \circ g$ et $A \times B \neq B \times A$. Il faut donc faire attention à ne pas changer l'ordre quand on passe des composées d'applications linéaires aux produits de matrices.

Propriété 20 (Application réciproque)

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension et de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$f \text{ est un isomorphisme} \Leftrightarrow M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \text{ est inversible.}$$

Et dans ce cas, on a : $\left(M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1} = M_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})$.

Preuve.

□

3.3 Isomorphismes de représentation

Propriété 21 (Isomorphisme de représentation des vecteurs)

On suppose que E est de dimension finie p et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Alors l'application

$$\Phi_{\mathscr{B}} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & M_{\mathscr{B}}(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Remarque. Ainsi, une fois la base $\mathscr{B}$ de E fixée, on en déduit que :

- tout vecteur u possède une unique représentation matricielle dans la base $\mathscr{B}$;
- toute matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est la représentation matricielle d'un unique vecteur de E.

Propriété 22 (Isomorphisme de représentation des applications linéaires)

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.

(1) L'application

$$\Phi_{\mathscr{B},\mathscr{C}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

(2) En particulier, si E et F sont de dimension finie, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est aussi de dimension finie et :

$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Remarque. Ainsi, une fois les bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{C}$ de F fixées, on en déduit que :

- toute application linéaire f possède une unique représentation matricielle dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$;
- toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la représentation matricielle dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ d'une unique application linéaire.

Le théorème suivant permet de ramener tout problème linéaire sur $f \in \mathscr{L}(E,F)$ à un problème de calcul matriciel sur $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, une fois les bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{C}$ de F fixées :

Théorème 23 (Recherche matricielle du noyau et de l'image d'une application linéaire)

Soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

(1) Pour tous $u \in E$ et $v \in F$,

$$v = f(u) \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathscr{C}}(v) = M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \cdot M_{\mathscr{B}}(u).$$

(2) En particulier :

- $u \in \mathrm{Ker}(f) \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathscr{B}}(u) \in \mathrm{Ker}(M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))$.
- $v \in \mathrm{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathscr{C}}(v) \in \mathrm{Im}(M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))$.

Méthode.
Si on connait la matrice $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ de $f \in \mathscr{L}(E,F)$ dans des bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{C}$ de F fixées, alors pour faire un calcul sur f on pourra :

1. *faire le calcul matriciel associé ;*
2. *en déduire les vecteurs qui correspondent aux matrices obtenues dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.*

Exercice. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $f(X^2 - X + 2)$ et $f(2X^2 - 3)$.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

3.4 Changement de bases

Théorème 24 (Formule de changement de bases)

Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des bases de E. On a pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$:

$$M_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} M_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right)^{-1} M_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}.$$

Remarque. Cette formule ne sert pas à calculer $M_{\mathscr{B}'}(f)$ (on revient à la définition de cette matrice pour la calculer). En revanche, elle sert à écrire une relation entre deux matrices d'une même application linéaire précédemment calculées. Cela sera en particulier utile pour trigonaliser une matrice qui n'est pas diagonalisable.

Exercice. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable ?

2. On pose $u = (2, -1)$ et $v = (-1, 0)$. Justifier que $\mathscr{B}' = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

3. Donner la matrice T de f dans la base $\mathscr{B}'$ puis la matrice P inversible telle que $A = PTP^{-1}$.

3.5 Matrices semblables

Définition.

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est **semblable** à $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}.$$

Remarques. Soient A, B et C trois matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Si A est semblable à B, alors B est semblable à A. En effet :

   On pourra donc dire plus simplement que A et B sont semblables.

2. Si A est semblable à B et B est semblable à C, alors A est semblable à C. En effet :

D'après le **Théorème 24**, deux matrices représentant un même endomorphisme dans deux bases différentes sont semblables. On peut montrer que la réciproque est également valable. Plus précisément :

Théorème 25 (Matrices semblables)

(1) Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

(2) En particulier, deux matrices semblables ont même rang.

Propriété 26 (des matrices semblables)

Soient A et B deux matrices semblables.

(1) A est inversible si et seulement si B est inversible.

(2) A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

(3) A et B ont les mêmes valeurs propres. Autrement dit :

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B).$$

(4) Pour toute valeur propre λ de A et B, les sous-espaces propres $E_\lambda(A)$ et $E_\lambda(B)$ ont même dimension :

$$\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda(B)).$$

En revanche, un vecteur propre de A n'est a priori pas un vecteur propre de B.

Preuve.

□