Chapitre 13

Variables aléatoires finies

Compétences attendues.

✓ Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire finie à partir de sa loi et réciproquement.

✓ Déterminer la loi de la transformée d'une variable aléatoire finie.

✓ Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire finie.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Variables aléatoires finies

1.1 Définition

Exemple. Considérons une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires.

- On réalise 5 tirages successifs sans remise. On appelle X le nombre de boules blanches obtenues. On dit que X est une **variable aléatoire**.

  X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3. On dit que $[\![0,3]\!]$ est le **support** de la variable aléatoire X.

- On réalise une infinité de tirages avec remise. On appelle Y le rang d'apparition de la première boule blanche. Y est une **variable aléatoire**.

  Y peut prendre les valeurs $1, 2, 3, \ldots$ Le **support** de Y est donc $[\![1,+\infty[\![$.

X est une **variable aléatoire finie** et Y est une **variable aléatoire discrète infinie**.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons uniquement aux **variables aléatoires finies**. Nous étudierons les **variables aléatoires discrètes infinies** dans un prochain chapitre.

Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ **désignera un espace probabilisé fini**.

Définition.

- Une **variable aléatoire finie** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est une application :

$$X : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array} \right.$$

- Le **support** d'une variable aléatoire finie X est l'ensemble, noté $X(\Omega)$, des valeurs prises par X. En particulier, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est un ensemble fini.

Notations. Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
Les événements $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$, $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$, $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq x\}$, $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}$, $\{\omega \in \Omega \mid x \leq X(\omega) \leq y\}$, $\{\omega \in \Omega \mid x < X(\omega) \leq y\}$, $\{\omega \in \Omega \mid x \leq X(\omega) < y\}$, $\{\omega \in \Omega \mid x < X(\omega) < y\}$, $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$, $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) seront notés respectivement $(X \leq x)$, $(X < x)$, $(X \geq x)$, $(X > x)$, $(x \leq X \leq y)$, $(x < X \leq y)$, $(x \leq X < y)$, $(x < X < y)$, $(X = x)$, $(X \in I)$.

Exemple. On lance deux dés équilibrés et on note Z la variable aléatoire égale à la somme des numéros obtenus.

1. Déterminer le support de Z.

2. Décrire les événements suivants :
   - $(Z = 1)$
   - $(Z = 4)$
   - $(Z < 5)$
   - $(Z \geq 10)$

1.2 Loi d'une variable aléatoire finie

Définition.

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
On appelle **loi de probabilité** de X l'ensemble

$$\{(x_k, p_k) \mid k \in [\![1, n]\!]\}$$

où $p_k = P(X = x_k)$.

Méthode.

Déterminer la loi d'une variable aléatoire finie X, c'est trouver $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, puis donner pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ la valeur de $P(X = x_k)$.

Exemple. On lance deux dés équilibrés et on note Z la variable aléatoire égale à la somme des numéros obtenus. Déterminer la loi de Z.

Propriété 1 (Loi de probabilité)

Un ensemble $\{(x_k, p_k) \mid k \in [\![1, n]\!]\}$ est une **loi de probabilité** si et seulement si

(1) pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k \geq 0$,

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Exemple.

1. Soit X une variable aléatoire finie telle que

$$X(\Omega) = \{-3, 2, 4\},\ P(X=2) = P(X=-3) + P(X=4) \text{ et } P(X=4) = \frac{1}{2}P(X=-3).$$

Déterminer entièrement la loi de X.

2. Une urne contient n boules blanches et n boules noires ($n \in \mathbb{N}^*$). On tire simultanément n boules et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

   (a) Déterminer la loi de Y.

   (b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

1.3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire finie

Définition.

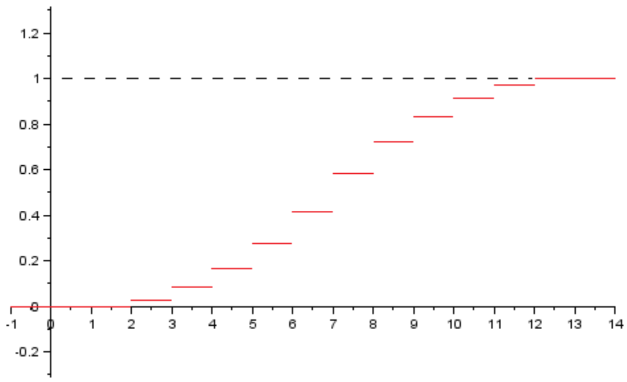
Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ de loi $\{(x_k, p_k) \mid k \in [\![1, n]\!]\}$.
On appelle **fonction de répartition** de X la fonction F_X définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_k \leq x} p_k.$$

Exemple. Reprenons l'exemple où on lance deux dés équilibrés et où Z est la variable aléatoire égale à la somme des numéros obtenus. Compléter le tableau suivant :

$\forall x \in$	$]-\infty, 2[$	$[2, 3[$	$[3, 4[$	$[4, 5[$	$[5, 6[$	$[6, 7[$	$[7, 8[$	$[8, 9[$	$[9, 10[$	$[10, 11[$	$[11, 12[$	$[12, +\infty[$
$F_Z(x)$												

On peut alors tracer la courbe représentative de F_Z :



Théorème 2 (Propriétés de la fonction de répartition)

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ de loi $\{(x_k, p_k) \mid k \in [\![1, n]\!]\}$ avec $x_1 < \ldots < x_n$ et F_X sa fonction de répartition. Alors :

(1) Pour tout réel x, $F_X(x) \in [0, 1]$.

(2) F_X est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

(3) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

(4) F_X **détermine entièrement la loi** de X :

$$p_1 = P(X = x_1) = F_X(x_1) \ \text{ et } \ \forall k \in [\![2, n]\!],\ p_k = P(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}).$$

Exemple. On lance deux dés équilibrés et on note X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer la fonction de répartition de X.

2. En déduire la loi de la variable X.

1.4 Transformée d'une variable aléatoire finie

Définition.

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et f une fonction. On note $f(X)$ l'application définie par :

$$f(X) : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & f(X(\omega)) \end{array} \right.$$

Alors $f(X)$ est une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et on dit que c'est la **transformée** de la variable aléatoire X par f.

Exemple. Un joueur lance successivement deux fois un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire finie égale à la différence des numéros obtenus entre le premier et le second lancer.

1. Déterminer la loi de X.

2. En déduire les lois de $Y = X + 5$, $Z = |X|$ et $T = X^2$.

2 Moments d'une variable aléatoire finie

2.1 Espérance d'une variable aléatoire finie

Définition.

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ de loi $\{(x_k, p_k) \mid k \in [\![1, n]\!]\}$. On appelle **espérance** de X et on note $E(X)$ le nombre réel défini par :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k.$$

Interprétation de l'espérance. L'espérance $E(X)$ est la moyenne des valeurs x_k prises par la variable aléatoire finie X pondérées par les probabilités $p_k = P(X = x_k)$ avec lesquelles X prend ses valeurs. C'est une généralisation de la notion de moyenne.

Propriété 3 (de l'espérance)

Soient X et Y deux variables aléatoires finies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et λ un réel.

(1) **Linéarité de l'espérance** : $X + Y$ et λX sont des variables aléatoires finies et on a :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(\lambda X) = \lambda E(X).$$

(2) **Positivité de l'espérance** : Si X est positive (c'est-à-dire si $X(\omega) \geq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$), alors $E(X)$ est positive.

(3) **Croissance de l'espérance** : Si $X \leq Y$ (c'est-à-dire si $X(\omega) \leq Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$), alors $E(X) \leq E(Y)$.

Exemples.

1. Soit X une variable aléatoire finie dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \{-3, 2, 4\} \;\text{ et }\; P(X=-3) = \frac{1}{3},\; P(X=2) = \frac{1}{2},\; P(X=4) = \frac{1}{6}.$$

Calculer l'espérance de X.

2. Soit Y une variable aléatoire finie dont la loi est donnée par :

$$Y(\Omega) = [\![1, n]\!] \;\text{ et }\; \forall k \in [\![1, n]\!],\; P(Y=k) = \frac{1}{n}.$$

Déterminer l'espérance de Y.

2.2 Le théorème de transfert

Théorème 4 (de transfert)

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ de loi $\{(x_k, p_k) \mid k \in [\![1, n]\!]\}$ et g une fonction. Alors :

$$E(g(X)) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) p_k.$$

Méthode.
Le théorème de transfert permet de calculer l'espérance de $g(X)$ sans connaître la loi de $g(X)$, mais seulement celle de X.

Exemples.

1. Soit X une variable aléatoire finie dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \{-3, 2, 4\} \ \text{ et } \ P(X = -3) = \frac{1}{3},\ P(X = 2) = \frac{1}{2},\ P(X = 4) = \frac{1}{6}.$$

   Calculer l'espérance de $E(X^2)$.

2. Soit Y une variable aléatoire finie dont la loi est donnée par :

$$Y(\Omega) = [\![1, n]\!] \ \text{ et } \ \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(Y = k) = \frac{1}{n}.$$

   Déterminer l'espérance de $E(Y^2)$.

Propriété 5 (de l'espérance)

Si X est une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, alors pour tous réels a et b,

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Preuve.

□

2.3 Variance d'une variable aléatoire finie

Définition.

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ de loi $\{(x_k, p_k) \mid k \in [\![1, n]\!]\}$.

- Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on appelle **moment d'ordre** r de X le nombre réel
$$E(X^r) = \sum_{k=1}^{n} x_k^r p_k.$$
- On appelle **variance** de X et on note $V(X)$ le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire finie $X - E(X)$, c'est-à-dire :
$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(X))^2 p_k.$$
- La racine carrée de la variance $\sqrt{V(X)}$ est appelée l'**écart type** de X et est notée $\sigma(X)$.

Interprétation de la variance. La variance d'une variable aléatoire finie X mesure la dispersion des valeurs prises par X par rapport à $E(X)$. En particulier, c'est un réel positif ou nul.

Théorème 6 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Alors :
$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Preuve.

□

Méthode.

Dans la quasi-totalité des cas, on utilise la formule de Koenig-Huygens pour calculer une variance et non la définition de base qui entraîne des calculs compliqués.

Exemple.

1. Soit X une variable aléatoire finie dont la loi est donnée par :
$$X(\Omega) = \{-3, 2, 4\} \text{ et } P(X = -3) = \frac{1}{3},\ P(X = 2) = \frac{1}{2},\ P(X = 4) = \frac{1}{6}.$$
Calculer la variance de X.

2. Soit Y une variable aléatoire finie dont la loi est donnée par :

$$Y(\Omega) = [\![1, n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(Y = k) = \frac{1}{n}.$$

Déterminer la variance de Y.

Propriété 7 (de la variance)

Si X est une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, alors pour tous réels a et b,

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Preuve.

□

2.4 Variables aléatoires finies centrées réduites

Définition.

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

- Si $E(X) = 0$, alors X est dite **centrée**.
- Si $V(X) = 1$, alors X est dite **réduite**.
- Si $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$, alors X est dite **centrée réduite**.

Propriété 8 (Variables aléatoires finies centrées réduites)

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

(1) $X - E(X)$ est **centrée**.
On dit que c'est **la variable aléatoire finie centrée associée à** X.

(2) Si $V(X) \neq 0$, alors

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$$

est une variable aléatoire finie **centrée réduite**.
On dit que X^* est **la variable aléatoire finie centrée réduite associée à** X.

Preuve.

□

Exemple. On lance deux pièces équilibrées et on considère la variable aléatoire finie X égale à 1 si on a obtenu 2 piles, -1 si on a obtenu 2 faces et 0 sinon.
X est-elle centrée réduite ? Sinon, donner la variable aléatoire finie centrée réduite X^* associée à X.

3 Variables aléatoires finies indépendantes

3.1 Cas $n = 2$

Définition.

Soient X et Y deux variables aléatoires finies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
On dit que X et Y sont **indépendantes** si pour tout $(x_k, y_l) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a :

$$P((X = x_k) \cap (Y = y_l)) = P(X = x_k)P(Y = y_l),$$

c'est-à-dire que les événements $(X = x_k)$ et $(Y = y_l)$ sont **indépendants**.

Propriété 9 (Variables aléatoires finies indépendantes)

Soient X et Y deux variables aléatoires fines **indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

(1) Pour tous intervalles $I, J \subset \mathbb{R}$, les événements $(X \in I)$ et $(Y \in J)$ sont **indépendants** :

$$P((X \in I) \cap (Y \in J)) = P(X \in I)P(Y \in J).$$

(2) Si f et g sont deux fonctions, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux variables aléatoires finies **indépendantes**.

Exemple. Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement et sans remise 3 boules. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues et Y celle égale au nombre de boules noires obtenues.

1. Déterminer les lois de X et de Y.

2. Les variables aléatoires finies X et Y sont-elles indépendantes ?

3.2 Cas général

Définition.

Soient n variables aléatoires finies $X_1, \ldots, X_n$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$, on a :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = x_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k),$$

c'est-à-dire que les événements $(X_1 = x_1), (X_2 = x_2), \ldots, (X_n = x_n)$ sont **mutuellement indépendantes**.

Propriété 10 (Variables aléatoires finies mutuellement indépendantes)

Soient n variables aléatoires finies $X_1, \ldots, X_n$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ qui sont **mutuellement indépendantes**.

(1) Pour tous intervalles $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$, les événements $(X_1 \in I_1), \ldots, (X_n \in I_n)$ sont **mutuellement indépendants** :

$$P((X_1 \in I_1) \cap \ldots \cap (X_n \in I_n)) = P(X_1 \in I_1) \times \ldots \times P(X_n \in I_n).$$

(2) Si $f_1, \ldots, f_n$ sont n fonctions, alors $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ sont n variables aléatoires finies **mutuellement indépendantes**.

(3) Si Y est une variable aléatoire finie ne dépendant que de $X_1, \ldots, X_p$ et si Z est une variable aléatoire finie ne dépendant que de $X_{p+1}, \ldots, X_n$, alors Y et Z sont **indépendantes**.