Chapitre 13

Lois à densité usuelles

Compétences attendues.

✓ Connaître une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance des lois usuelles.

✓ Connaître les propriétés de la fonction de répartition Φ d'une loi normale centrée réduite.

✓ Savoir utiliser la table des valeurs de Φ.

✓ Savoir passer d'une loi normale à une loi normale centrée réduite par transformation affine.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECG au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Loi uniforme

Définition.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a, b]$, notée $\mathcal{U}([a, b])$, si X a pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ si X suit la **loi uniforme** sur $[a, b]$.

Exercice. Vérifier que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ est une densité.

Propriété 1 (Fonction de répartition de la loi uniforme)

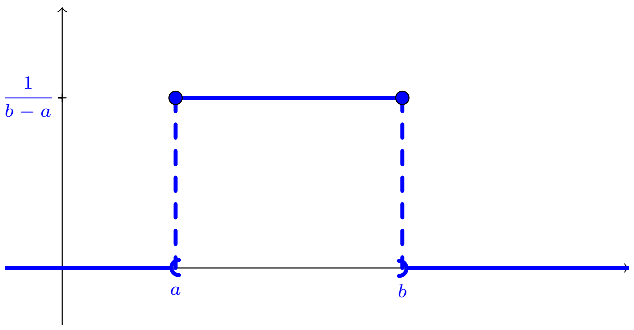
La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire qui suit la **loi uniforme** $\mathcal{U}([a, b])$ est la fonction F définie pour tout réel x par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{si } b < x. \end{cases}$$

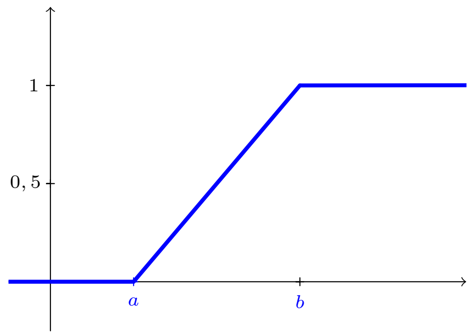
Preuve.

$\square$

Représentations graphiques.



Densité de la loi uniforme sur $[a, b]$.



Fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a, b]$.

Propriété 2 (Espérance et variance de la loi uniforme)

Si X est une variable aléatoire suivant la **loi uniforme** $\mathcal{U}([a, b])$, alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Preuve.

□

Cas particulier. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, alors X admet pour densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et pour fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

De plus, on a $E(X) = \dfrac{1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{1}{12}$.

Propriété 3 (Transformées affines d'une loi uniforme)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. On a :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \quad \Leftrightarrow \quad Y = a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b]).$$

Preuve.

□

Simulation informatique. Après avoir importé la librairie `numpy.random` avec le raccourci `rd`, la commande :

- `rd.uniform(a, b)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$.
- `rd.uniform(a, b, r)` retourne un vecteur de taille r dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$.
- `rd.uniform(a, b, [r, s])` retourne une matrice de taille $r \times s$ dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$.

Cette commande `rd.uniform` est hors programme. Pour rester dans le cadre du programme, on pourra utiliser la propriété précédente et la commande `rd.random` :

- `a+(b-a)*rd.random()` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi $\mathcal{U}([a,b])$.
- `a+(b-a)*rd.random(r)` retourne un vecteur de taille r dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$.
- `a+(b-a)*rd.random([r, s])` retourne une matrice de taille $r \times s$ dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$.

2 Loi exponentielle

Définition.

Une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si X a pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ si X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ.

Exercice. Vérifier que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$ est une densité.

Propriété 4 (Fonction de répartition de la loi exponentielle)

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire qui suit **la loi exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ (avec $\lambda > 0$) est la fonction F définie pour tout réel x par :

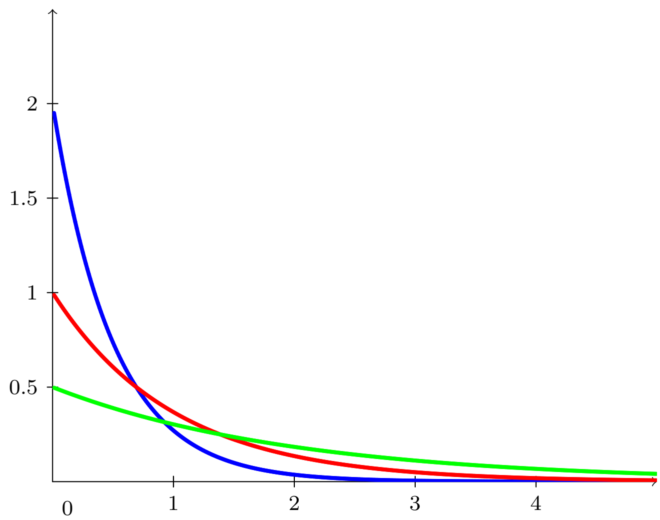
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Preuve.

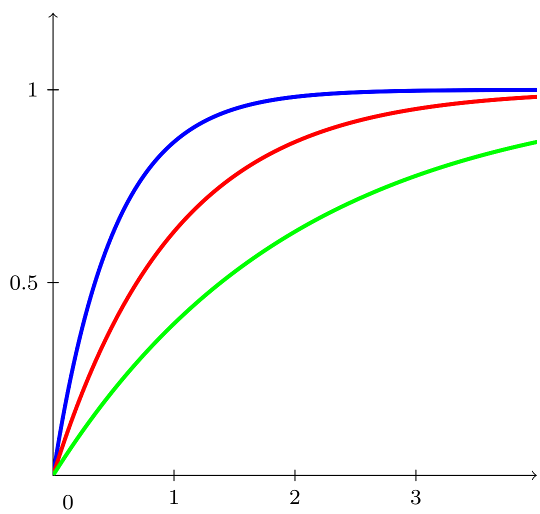
□

Représentations graphiques.

$\lambda = 2, 1, 0.5$



Densité de la loi $\mathscr{E}(\lambda)$.



Fonction de répartition de la loi $\mathscr{E}(\lambda)$.

Propriété 5 (Espérance et variance de la loi exponentielle)

Si X est une variable aléatoire suivant une **loi exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ (avec $\lambda > 0$), alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Preuve.

$\square$

Simulation informatique. Après avoir importé la librairie `numpy.random` avec le raccourci `rd`, la commande :

- `rd.exponential(1/lambda)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
- `rd.exponential(1/lambda, r)` retourne un vecteur de taille r dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
- `rd.exponential(1/lambda, [r, s])` retourne une matrice de taille $r \times s$ dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

Attention, il faut entrer $\frac{1}{\lambda}$ comme paramètre sur `Python` pour une loi $\mathcal{E}(\lambda)$!

3 Loi normale centrée réduite

Définition.

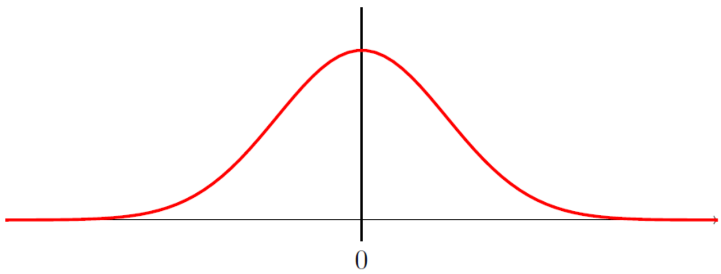
Une variable aléatoire X suit la **loi normale centrée réduite**, notée $\mathcal{N}(0,1)$, si X a pour densité la fonction φ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ si X suit la **loi normale centrée réduite**.

Remarques.

1. φ est bien une densité : φ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 1$ (résultat admis).
2. La fonction φ est paire, son graphe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées :

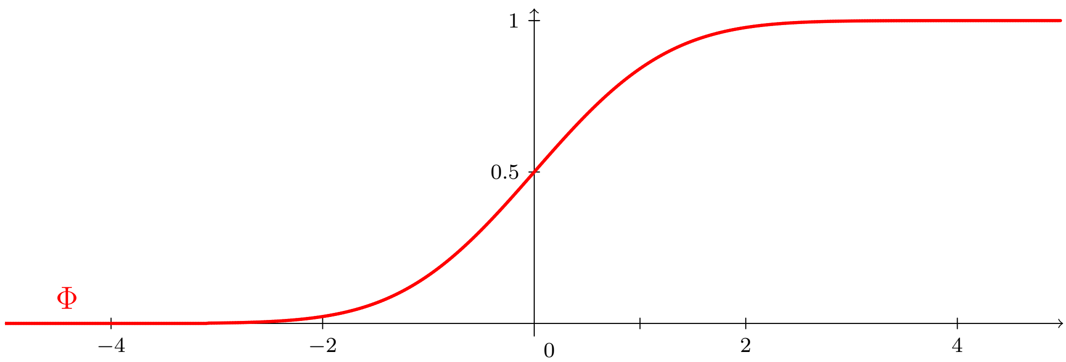


Densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

3. On note Φ la fonction de répartition associée à la loi normale centrée réduite : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

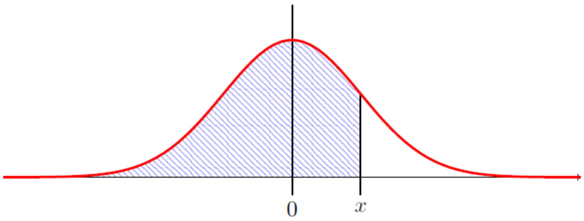
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Voici sa courbe représentative :

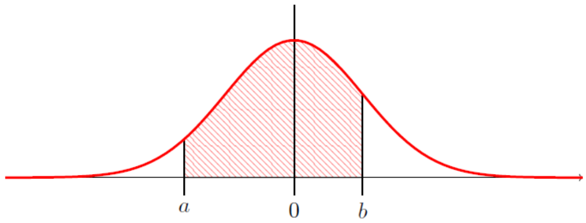


Fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On représente aussi graphiquement $\Phi(x)$ comme l'aire sous la courbe de Φ entre $-\infty$ et x :



$= \Phi(x)$



$= \Phi(b) - \Phi(a)$

Propriété 6 (de la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite)

Notons Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors :

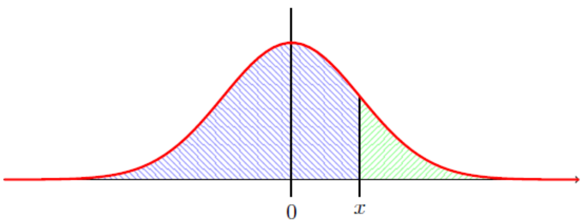
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

En particulier, $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.

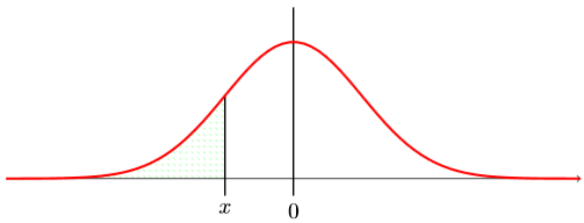
Preuve.

□

Remarque. Ce résultat peut se lire graphiquement :



$= \Phi(x)$ et $= 1 - \Phi(x)$



$= \Phi(-x)$

Remarque. Il n'est pas possible d'exprimer "simplement" la fonction de répartition Φ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ à l'aide des fonctions usuelles. Par contre, on dispose en plus de ces quelques règles de calculs, d'une table de valeurs :

x	$0,00$	$0,01$	$0,02$	$0,03$	$0,04$	$0,05$	$0,06$	$0,07$	$0,08$	$0,09$
$0,0$	$0,5000$	$0,5040$	$0,5080$	$0,5120$	$0,5160$	$0,5199$	$0,5239$	$0,5279$	$0,5319$	$0,5359$
$0,1$	$0,5398$	$0,5438$	$0,5478$	$0,5517$	$0,5557$	$0,5596$	$0,5636$	$0,5675$	$0,5714$	$0,5753$
$0,2$	$0,5793$	$0,5832$	$0,5871$	$0,5910$	$0,5948$	$0,5987$	$0,6026$	$0,6064$	$0,6103$	$0,6141$
$0,3$	$0,6179$	$0,6217$	$0,6255$	$0,6293$	$0,6331$	$0,6368$	$0,6406$	$0,6443$	$0,6480$	$0,6517$
$0,4$	$0,6554$	$0,6591$	$0,6628$	$0,6664$	$0,6700$	$0,6736$	$0,6772$	$0,6808$	$0,6844$	$0,6879$
$0,5$	$0,6915$	$0,6950$	$0,6985$	$0,7019$	$0,7054$	$0,7088$	$0,7123$	$0,7157$	$0,7190$	$0,7224$
$0,6$	$0,7257$	$0,7291$	$0,7324$	$0,7357$	$0,7389$	$0,7422$	$0,7454$	$0,7486$	$0,7517$	$0,7549$
$0,7$	$0,7580$	$0,7611$	$0,7642$	$0,7673$	$0,7704$	$0,7734$	$0,7764$	$0,7794$	$0,7823$	$0,7852$
$0,8$	$0,7881$	$0,7910$	$0,7939$	$0,7967$	$0,7995$	$0,8023$	$0,8051$	$0,8078$	$0,8106$	$0,8133$
$0,9$	$0,8159$	$0,8186$	$0,8212$	$0,8238$	$0,8264$	$0,8289$	$0,8315$	$0,8340$	$0,8365$	$0,8389$
$1,0$	$0,8413$	$0,8438$	$0,8461$	$0,8485$	$0,8508$	$0,8531$	$0,8554$	$0,8577$	$0,8599$	$0,8621$
$1,1$	$0,8643$	$0,8665$	$0,8686$	$0,8708$	$0,8729$	$0,8749$	$0,8770$	$0,8790$	$0,8810$	$0,8830$
$1,2$	$0,8849$	$0,8869$	$0,8888$	$0,8907$	$0,8925$	$0,8944$	$0,8962$	$0,8980$	$0,8997$	$0,9015$
$1,3$	$0,9032$	$0,9049$	$0,9066$	$0,9082$	$0,9099$	$0,9115$	$0,9131$	$0,9147$	$0,9162$	$0,9177$
$1,4$	$0,9192$	$0,9207$	$0,9222$	$0,9236$	$0,9251$	$0,9265$	$0,9279$	$0,9292$	$0,9306$	$0,9319$
$1,5$	$0,9332$	$0,9345$	$0,9357$	$0,9370$	$0,9382$	$0,9394$	$0,9406$	$0,9418$	$0,9429$	$0,9441$
$1,6$	$0,9452$	$0,9463$	$0,9474$	$0,9484$	$0,9495$	$0,9505$	$0,9515$	$0,9525$	$0,9535$	$0,9545$
$1,7$	$0,9554$	$0,9564$	$0,9573$	$0,9582$	$0,9591$	$0,9599$	$0,9608$	$0,9616$	$0,9625$	$0,9633$
$1,8$	$0,9641$	$0,9649$	$0,9656$	$0,9664$	$0,9671$	$0,9678$	$0,9686$	$0,9693$	$0,9699$	$0,9706$
$1,9$	$0,9713$	$0,9719$	$0,9726$	$0,9732$	$0,9738$	$0,9744$	$0,9750$	$0,9756$	$0,9761$	$0,9767$
$2,0$	$0,9772$	$0,9778$	$0,9783$	$0,9788$	$0,9793$	$0,9798$	$0,9803$	$0,9808$	$0,9812$	$0,9817$
$2,1$	$0,9821$	$0,9826$	$0,9830$	$0,9834$	$0,9838$	$0,9842$	$0,9846$	$0,9850$	$0,9854$	$0,9857$
$2,2$	$0,9861$	$0,9864$	$0,9868$	$0,9871$	$0,9875$	$0,9878$	$0,9881$	$0,9884$	$0,9887$	$0,9890$
$2,3$	$0,9893$	$0,9896$	$0,9898$	$0,9901$	$0,9904$	$0,9906$	$0,9909$	$0,9911$	$0,9913$	$0,9916$
$2,4$	$0,9918$	$0,9920$	$0,9922$	$0,9925$	$0,9927$	$0,9929$	$0,9931$	$0,9932$	$0,9934$	$0,9936$
$2,5$	$0,9938$	$0,9940$	$0,9941$	$0,9943$	$0,9945$	$0,9946$	$0,9948$	$0,9949$	$0,9951$	$0,9952$
$2,6$	$0,9953$	$0,9955$	$0,9956$	$0,9957$	$0,9959$	$0,9960$	$0,9961$	$0,9962$	$0,9963$	$0,9964$
$2,7$	$0,9965$	$0,9966$	$0,9967$	$0,9968$	$0,9969$	$0,9970$	$0,9971$	$0,9972$	$0,9973$	$0,9974$
$2,8$	$0,9974$	$0,9975$	$0,9976$	$0,9977$	$0,9977$	$0,9978$	$0,9979$	$0,9979$	$0,9980$	$0,9981$
$2,9$	$0,9981$	$0,9982$	$0,9982$	$0,9983$	$0,9984$	$0,9984$	$0,9985$	$0,9985$	$0,9986$	$0,9986$
$3,0$	$0,9987$	$0,9987$	$0,9987$	$0,9988$	$0,9988$	$0,9989$	$0,9989$	$0,9989$	$0,9990$	$0,9990$
$3,1$	$0,9990$	$0,9991$	$0,9991$	$0,9991$	$0,9992$	$0,9992$	$0,9992$	$0,9992$	$0,9993$	$0,9993$
$3,2$	$0,9993$	$0,9993$	$0,9994$	$0,9994$	$0,9994$	$0,9994$	$0,9994$	$0,9995$	$0,9995$	$0,9995$
$3,3$	$0,9995$	$0,9995$	$0,9995$	$0,9996$	$0,9996$	$0,9996$	$0,9996$	$0,9996$	$0,9996$	$0,9997$
$3,4$	$0,9997$	$0,9997$	$0,9997$	$0,9997$	$0,9997$	$0,9997$	$0,9997$	$0,9997$	$0,9997$	$0,9998$
$3,5$	$0,9998$	$0,9998$	$0,9998$	$0,9998$	$0,9998$	$0,9998$	$0,9998$	$0,9998$	$0,9998$	$0,9998$
$3,6$	$0,9998$	$0,9998$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$
$3,7$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$
$3,8$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$	$0,9999$
$3,9$	$1,0000$	$1,0000$	$1,0000$	$1,0000$	$1,0000$	$1,0000$	$1,0000$	$1,0000$	$1,0000$	$1,0000$

Exercice.

1. Donner les valeurs de $\Phi(1.73)$ et de $\Phi(-0.67)$.

2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer, à l'aide de la table de la loi normale centrée réduite, la valeur de $x > 0$ telle que $P(-x \leq X \leq x) \simeq 0,95$.

Propriété 7 (Espérance et variance de la loi normale centrée réduite)

Si X est une variable aléatoire suivant la **loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0, 1)$, alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = 0 \quad \text{et} \quad V(X) = 1.$$

Preuve.

$\square$

4 Loi normale

Définition.

Une variable aléatoire X suit la **loi normale** de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, si X a pour densité la fonction $\varphi_{m,\sigma}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si X suit la **loi normale** de paramètres m et σ.

Remarque. Comme dans le cas centrée réduite, la fonction de répartition associée à la normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ n'admet pas d'expression "simple". On la note $\Phi_{m,\sigma}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt.$$

Propriété 8 (Transformées affines d'une loi normale)

(1) Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2).$$

(2) En particulier, on a :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \quad \Leftrightarrow \quad X^* = \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Preuve.

□

Exercice. On suppose que Y est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(7, 16)$.

1. Calculer les probabilités suivantes : $P(Y < 7)$ et $P(Y \leq 12, 12)$.

2. Déterminer le seuil x tel que : $P(Y \leq x) = 0, 9162$.

3. Déterminer le seuil y tel que : $P(Y > y) = 0, 9418$.

Théorème 9 (Espérance et variance)

Si X est une variable aléatoire qui suit la **loi normale** $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = m \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2.$$

Preuve.

□

Remarques.

1. Ce théorème permet de comprendre les notations m et σ. Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $m = E(X)$ et $\sigma = \sqrt{V(X)}$. Ainsi, la notation m peut-être lue comme "moyenne" et la notation σ est celle que nous avons déjà utilisée pour l'écart type.

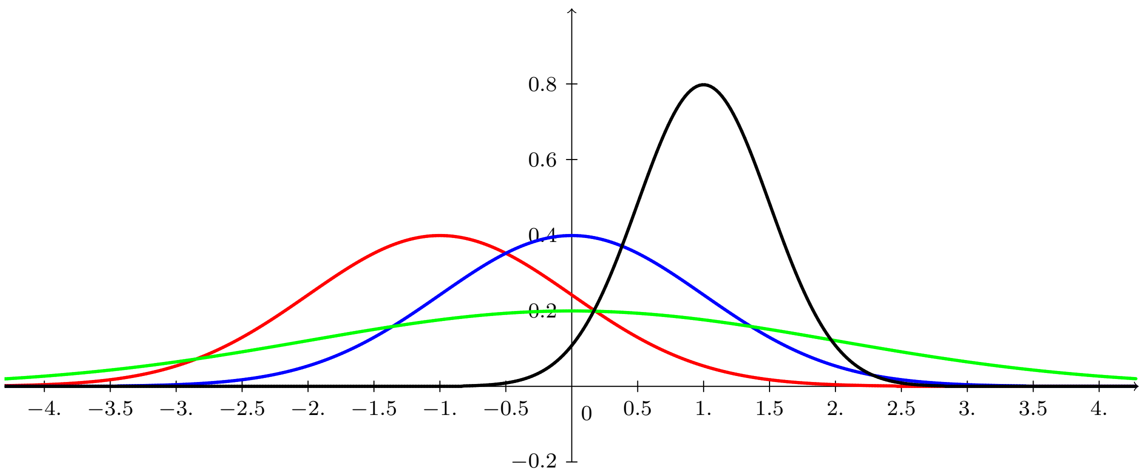
2. La loi normale centrée réduite est simplement une loi normale particulière avec $m = 0$ et $\sigma = 1$.

3. Considérons une variable aléatoire X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. La densité d'une telle loi est représentée par une courbe en cloche.

   - La cloche est centrée en m.
   - La cloche (hauteur et largeur) dépend de σ. Plus σ est petit, plus le pic est haut et fin. Plus σ est grand, plus le pic est bas et large.

Représentations graphiques.

$(m, \sigma) =$(0,1), $(0, 2)$, $(-1, 1)$, $(1, 1/2)$



Densité de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Théorème 10 (Stabilité par somme des lois normales)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires. On suppose que :

- $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes,
- pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$.

Simulation informatique. Après avoir importé la librairie `numpy.random` avec le raccourci `rd`, la commande :

- `rd.normal(m, sigma)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi normal $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
- `rd.normal(m, sigma, r)` retourne un vecteur de taille r dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi normal $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
- `rd.normal(m, sigma, [r, s])` retourne une matrice de taille $r \times s$ dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi uniforme $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Attention, le second paramètre de la loi normale choisi par `Python` est σ et non σ^2 !

5 Tableau des lois à densité usuelles

Dénomination	Notation	Paramètres	Une densité	La fonction de répartition	Espérance	Variance
Loi uniforme	$\mathcal{U}([a,b])$	$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$	$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$	$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b], \\ 1 & \text{si } b < x. \end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Loi exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$	$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Loi normale centrée réduite	$\mathcal{N}(0,1)$		$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right) dt$	0	1
Loi normale	$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt$	m	σ^2