Chapitre 14

Équations différentielles

Compétences attendues.

- ✓ Savoir étudier des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.
- ✓ Savoir étudier des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.
- ✓ Savoir étudier des systèmes différentiels linéaires associés à des matrices d'ordre 2 et 3.
- ✓ Connaître le lien entre équations différentielles linéaire du second ordre à coefficients constants et systèmes différentiels linéaires.
- ✓ Savoir étudier le comportement asymptotique des trajectoires.
- ✓ Savoir étudier des trajectoires de systèmes d'ordre 2.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECG au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Équations différentielles linéaires

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1.1 Généralités

Définition et exemples

Définition.

On appelle **équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre** n toute équation différentielle de la forme

$$(E): \ a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b$$

où

- n est un entier naturel non nul ;
- $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sont des constantes avec $a_n \neq 0$, appelées **coefficients** de l'équation différentielle ;
- $t \mapsto b(t)$ est une fonction définie sur I, appelée **second membre** de l'équation différentielle ;
- l'inconnue $y : t \mapsto y(t)$ est une fonction définie et (au moins) dérivable n fois sur I et, pour $0 \leq k \leq n$, $y^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de y.

Si la fonction b est nulle, on dit que l'équation différentielle est **homogène**.

Remarque. Étant donnée une équation différentielle

$$(E): \ a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b,$$

on notera (E_0) l'équation différentielle homogène associée

$$(E_0): \ a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Exemples.

- $y' = y$ est linéaire, à coefficients constants, homogène et d'ordre 1.
- $y'' = y$ est linéaire, à coefficients constants, homogène et d'ordre 2.
- $y' = 2y + 5$ est linéaire, à coefficients constants, non homogène et d'ordre 1.
- $y' = y^2$ est non linéaire, à coefficients constants, homogène et d'ordre 1.
- $y' + ty = t^2$ est linéaire, à coefficients non constants (t n'est pas une constante), non homogène et d'ordre 1.
- $y''' + y'' + y' + y = e^t$ est linéaire, à coefficients constants, non homogène et d'ordre 3.

Ensemble des solutions

Propriété 1 (Principe de superposition)

Soient

$$(E_1): \ a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b_1$$

et

$$(E_2): \ a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b_2$$

deux équations différentielles linéaires à coefficients constants qui diffèrent seulement par leur second membre b_1 et b_2.

Si y_1 est une solution de (E_1) et y_2 est une solution de (E_2), alors, pour tous réels λ et μ, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est une solution de l'équation différentielle

$$(E): \ a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = \lambda b_1 + \mu b_2.$$

Preuve.

□

Exercice.

1. Déterminer une solution constante de l'équation différentielle $y' - y = 1$.

2. Vérifier que la fonction $t \mapsto te^t$ est une solution de l'équation différentielle $y' - y = e^t$.

3. En déduire une solution de l'équation différentielle $y' - y = 2 - 3e^t$.

Remarque. Le principe de superposition dit en substance que :

$$\text{résoudre l'équation différentielle } (E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{résoudre l'équation différentielle homogène } (E_0) \\ \text{et} \\ \text{trouver une solution particulière de } (E) \end{array} \right.$$

Propriété 2 (Structure algébrique de l'ensemble des solutions de l'équation homogène)

On considère une équation différentielle **linéaire homogène** à coefficients constants d'ordre n :

$$(E_0) : \; a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

L'ensemble des solutions de (E_0) est **stable par combinaisons linéaires**. Autrement dit, c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Preuve.

□

Problème de Cauchy

Définition.

Soit $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Résoudre le **problème de Cauchy**

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{array} \right.$$

c'est trouver les solutions de l'équation différentielle $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b$ qui vérifient les **conditions initiales**

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad y^{(i)}(t_0) = y_i.$$

Théorème 3 (Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy)

Pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, il **existe une unique solution** au problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{array} \right.$$

Remarque. Ce théorème donne l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle en imposant des conditions initiales. Mais il ne dit rien sur la résolution en pratique.

Trajectoires

Définition.

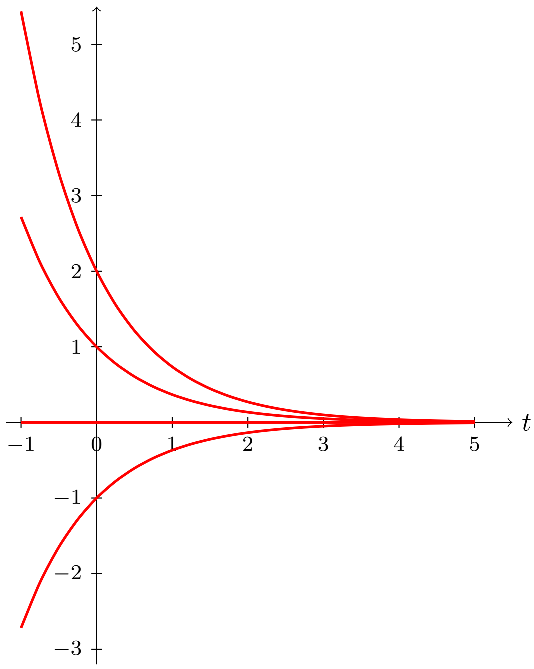
On appelle **trajectoire** d'une équation différentielle (E) sur I, tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$

$$\{(t, y(t)) \mid t \in I\},$$

où y est une solution de l'équation différentielle (E).

Représentation graphique. Les trajectoires sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ que l'on peut assimiler géométriquement aux courbes représentatives des solutions de l'équation différentielle.

Exemple. On peut vérifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \lambda e^{-t}$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$. Voici la représentation graphique des trajectoires associées pour $\lambda = -1, 0, 1$ et 2 :



Remarque. Par unicité d'une solution à un problème de Cauchy, une trajectoire est entièrement déterminée par sa ou ses conditions initiales. En particulier,

1. Pour les équations différentielles d'ordre 1, ceci signifie que deux trajectoires différentes ne peuvent se couper.
2. Pour les équations différentielles d'ordre 2, ceci signifie que deux trajectoires différentes ne peuvent se couper et avoir la même tangente en un point.

Définition.

- On appelle **trajectoire d'équilibre** d'une équation différentielle toute trajectoire associée à une solution constante de cette équation différentielle.
- Supposons que $+\infty$ soit une borne de I (ce qui est toujours le cas en pratique).
  On dit qu'une trajectoire $\{(t, y(t)) \mid t \in I\}$ d'une équation différentielle est **convergente** si $y(t)$ possède une limite finie quand t tend vers $+\infty$.

Propriété 4 (Trajectoires convergentes)

Si une trajectoire est convergente, alors elle converge nécessairement vers une trajectoire d'équilibre.

Exemples.

1. $\{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est une trajectoire d'équilibre de l'équation différentielle $y' + y = 0$ puisque la fonction constante égale à 0 est solution.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la trajectoire $\{(t, \lambda e^{-t}) \mid t \in \mathbb{R}\}$ de l'équation différentielle $y' + y = 0$ est convergente puisque $\lim\limits_{t \to +\infty} \lambda e^{-t} = 0$.
   On constate bien ici qu'il y a convergence vers la trajectoire d'équilibre $\{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

1.2 Équations différentielles du premier ordre

On cherche à résoudre dans cette partie une **équation différentielle linéaire d'ordre** 1 **à coefficients constants** de la forme

$$(E): \ y' + ay = b$$

où

- a est une constante réelle ;
- b est une fonction continue sur I ;
- l'inconnue $y : t \mapsto y(t)$ est une fonction définie et (au moins) une fois dérivable sur I.

Remarque. Lorsqu'il y a un coefficient non nul devant y', on commencera par diviser l'équation par ce coefficient pour se ramener à une équation de la forme $y' + ay = b$.

Le cas homogène

Théorème 5 (Solution de l'équation homogène $y' + ay = 0$)

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $(E_0): \ y' + ay = 0$ est

$$S_0 = \left\{t \mapsto \lambda e^{-at} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{-at}\right).$$

Exercice. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène

$$(E_0): \ y' + 2y = 0.$$

Résolution complète

Théorème 6 (Solution de l'équation générale $y' + ay = b$)

Soit $(E): \ y' + ay = b$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
Soit y_p une solution particulière de (E) et S_0 l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E). L'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{y_p + y_0 \mid y_0 \in S_0\} = \left\{t \mapsto y_p(t) + \lambda e^{-at} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Remarques.

1. Dans le cas particulier où a est non nulle et b est une constante, on remarquera que la fonction constante $t \mapsto \dfrac{b}{a}$ est une solution particulière de $(E): \ y' + ay = b$.
2. Dans le cas général, il n'y a pas de méthode au programme pour déterminer une solution particulière. On suivra pas à pas les indications de l'exercice pour en déterminer une.

Exercice. On considère l'équation différentielle

$$(E): \ y' + 2y = 1 + t.$$

1. Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $t \mapsto at + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Condition initiale

En appliquant le **Théorème 3** lorsque $n = 1$, on a la :

Propriété 7 (Existence et unicité d'une solution - Cas où $n = 1$)

Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Remarque. Pour déterminer cette unique solution, il suffit de déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ puis d'évaluer avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$ pour déterminer la valeur de la constante λ.

Exercice. Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2y = 1 + t, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Donnons pour finir la méthode complète pour résoudre une équation différentielle du premier ordre :

Méthode.

Pour résoudre une équation différentielle $(E): \ y' + ay = b$:

1. *On résout l'équation homogène $(E_0): \ y' + ay = 0$ associée à (E).*
   Les solutions sont de la forme $y_0(t) = \lambda e^{-at}$, avec λ une constante réelle.
2. *On cherche une solution particulière y_p de (E) (en se laissant guider par l'exercice).*
3. *On donne l'ensemble des solutions de (E). Elles sont de la forme $y(t) = y_p(t) + y_0(t)$.*
4. *Si on a une condition initiale $y(t_0) = y_0$, on évalue la solution y obtenue pour déterminer la valeur de λ.*

1.3 Équations différentielles du second ordre

On cherche à résoudre dans cette partie une **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** de la forme

$$(E): \ y'' + ay' + by = c$$

où

- a et b sont des constantes réelles ;
- c est une fonction continue sur I ;
- l'inconnue $y : t \mapsto y(t)$ est une fonction définie et (au moins) deux fois dérivable sur I.

Remarque. Lorsqu'il y a un coefficient non nul devant y'', on commencera par diviser l'équation par ce coefficient pour se ramener à une équation de la forme $y'' + ay' + by = c$.

Le cas homogène

Théorème 8 (Solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$)

On appelle **équation caractéristique** associée à l'équation différentielle homogène

$$(E_0): \ y'' + ay' + by = 0$$

l'équation d'inconnue r suivante :

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Notons Δ le discriminant de cette équation.

(1) Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Alors l'ensemble des solutions de (E_0) est

$$S_0 = \left\{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t}\right).$$

(2) Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une unique racine r_0. Alors l'ensemble des solutions de (E_0) est

$$S_0 = \left\{t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_0 t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto t e^{r_0 t}, t \mapsto e^{r_0 t}\right).$$

Exercice. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène

$$(E_0): \ y'' + y' - 2y = 0.$$

Résolution complète

Théorème 9 (Solution de l'équation générale $y'' + ay' + by = c$)

Soit $(E): \ y'' + ay' + by = c$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Soit y_p une solution particulière de (E) et S_0 l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E). L'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{y_p + y_0 \mid y_0 \in S_0\}.$$

Remarques.

1. Dans le cas particulier où b est non nulle et c est une constante, on remarquera que la fonction constante $t \mapsto \dfrac{c}{b}$ est une solution particulière de $(E): \ y'' + ay' + by = c$.
2. Dans le cas général, il n'y a pas de méthode au programme pour déterminer une solution particulière. On suivra pas à pas les indications de l'exercice pour en déterminer une.

Exercice. On considère l'équation différentielle

$$(E): \ y'' + y' - 2y = (10 + 8t)e^{2t}.$$

1. Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $t \mapsto ate^{2t}$ où $a \in \mathbb{R}$.

2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Conditions initiales

En appliquant le **Théorème 3** lorsque $n = 2$, on a la :

Propriété 10 (Existence et unicité d'une solution - Cas où $n = 2$)

Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Remarque. Pour déterminer cette unique solution, il suffit de déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$ puis d'évaluer avec les conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$ pour déterminer la valeur des constantes λ et μ.

Exercice. Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = (10 + 8t)e^{2t}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Donnons pour finir la méthode complète pour résoudre une équation différentielle du second ordre :

Méthode.

Pour résoudre une équation différentielle (E) : $y'' + ay' + by = c$:

1. *On résout l'équation homogène (E_0) : $y'' + ay' + by = 0$ associée à (E). Pour cela, on détermine les racines de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b + 0$.*
   - *Si elle admet deux racines r_1 et r_2, les solutions sont de la forme $y_0(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$, avec λ et μ deux constantes réelles.*
   - *Si elle admet une unique racine r_0, les solutions sont de la forme $y_0(t) = (\lambda t + \mu)e^{r_0 t}$, avec λ et μ deux constantes réelles.*
2. *On cherche une solution particulière y_p de (E) (en se laissant guider par l'exercice).*
3. *On donne enfin l'ensemble des solutions de (E). Elles sont de la forme $y(t) = y_p(t) + y_0(t)$.*
4. *Si on a des conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$, on évalue la solution y obtenue pour déterminer les valeurs de λ et μ.*

2 Systèmes différentiels linéaires

2.1 Définition et écriture matricielle

Définition.

On appelle **système différentiel linéaire à coefficients constants** tout système d'équations différentielles de la forme :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ x_2' & = & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n \\ & \vdots & \\ x_n' & = & a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n \end{array} \right.$$

où

- n est un entier naturel non nul ;
- les $a_{i,j}$ sont des constantes réelles, appelées **coefficients** du système différentiel ;
- $x_1, \ldots, x_n$ désignent des fonctions inconnues que l'on supposera être définies (et dérivables) sur $\mathbb{R}$.

Résoudre un tel système, c'est trouver toutes les fonctions $x_1, \ldots, x_n$ vérifiant simultanément les n équations du système.

Notation. On peut réécrire le système différentiel (S) sous la forme matricielle

$$X' = AX,$$

où $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$.

Exercice. On considère le système différentiel linéaire

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} x_1' = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_3' = -x_1 - 2x_2 + x_3 \end{array} \right.$$

Expliciter la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ associée à ce système différentiel.

2.2 Solutions des systèmes différentiels

Définition.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Résoudre le **problème de Cauchy**

$$\left\{ \begin{array}{l} X' = AX \\ X(t_0) = X^0 \end{array} \right.$$

c'est trouver les solutions du système différentiel linéaire $X' = AX$ qui vérifient la **condition initiale** $X(t_0) = X^0$, c'est-à-dire

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i(t_0) = x_i^0.$$

Théorème 11 (Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy)

Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il **existe une unique solution** au problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} X' = AX \\ X(t_0) = X^0 \end{array} \right.$$

Remarque. Ce théorème donne l'existence et l'unicité de la solution d'un système différentiel en imposant des conditions initiales. Mais il ne dit rien sur la résolution en pratique.

Théorème 12 (Résolution et ensemble solution)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **diagonalisable**. On note :

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes, chaque valeur propre apparaît autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé) ;
- $(U_1, \ldots, U_n)$ une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, U_i est un vecteur propre associé à la valeur propre α_i.

Alors l'ensemble des solutions du systèmes différentiel linéaire $X' = AX$ est :

$$\begin{array}{rcl} S & = & \left\{t \mapsto \lambda_1 e^{\alpha_1 t} U_1 + \ldots + \lambda_n e^{\alpha_n t} U_n \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\right\} \\ & = & \left\{t \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{\alpha_i t} U_i \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{\alpha_1 t} U_1, \ldots, t \mapsto e^{\alpha_n t} U_n\right). \end{array}$$

Preuve.

$\square$

Remarques.

1. L'ensemble des solutions d'un système différentiel linéaire est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Cet ensemble est donc **stable par combinaisons linéaires**.

2. Ce théorème ne s'applique pas lorsque A n'est pas diagonalisable (car on ne dispose alors pas d'une base de vecteurs propres de A). Dans ce cas, il faut suivre pas à pas les indications de l'exercice (voir par exemple **Exercice 20** et **Exercice 21** du TD 14).

Méthode.

Pour résoudre un système différentiel linéaire $X' = AX$:

1. *On détermine les valeurs propres de A et une base de chacun des sous-espaces propres associés.*

2. *On prouve par concaténation qu'on obtient une base $(U_1, \ldots, U_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.*

3. *On explicite enfin l'ensemble des solutions du système différentiel linéaire à l'aide du théorème précédent.*

Exercice. On considère toujours le système différentiel linéaire

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} x_1' = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_3' = -x_1 - 2x_2 + x_3 \end{array} \right.$$

et on note $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice associée.

1. Justifier que A est diagonalisable. Donner sans calcul une première valeur propre de A.

2. Calculer $A^2(A - 6I_3)$. En déduire le spectre de A.

3. Diagonaliser A.

4. Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression de $X(t)$.

5. On ajoute les conditions initiales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$ et $x_3(0) = 5$. Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy associé.

2.3 Lien entre équation différentielle d'ordre 2 et système différentiel

Propriété 13 (Lien entre équation différentielle d'ordre 2 et système différentiel)

Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$. On considère l'équation différentielle linéaire **homogène** d'ordre 2 suivante :

$$y'' + ay' + by = 0.$$

En posant $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$, on a l'équivalence :

$$y'' + ay' + by = 0 \Leftrightarrow X' = AX.$$

Preuve.

□

Méthode.

Pour résoudre une équation différentielle d'ordre 2 à l'aide d'un système :

1. *On détermine la matrice A telle que :*

$$y'' + ay' + by = 0 \Leftrightarrow X' = AX.$$

2. *On résout le système différentiel $X' = AX$.*
3. *On conclut en ne considérant que la première composante du vecteur colonne X.*

Exercice. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante à l'aide d'un système différentiel :

$$(E) : \; y'' - y' - 2y = 0.$$

2.4 Trajectoires, états d'équilibre et convergence

Trajectoires

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle **trajectoire** du système différentiel linéaire $X' = AX$ tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$\{(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ est une solution du système différentiel $X' = AX$.

Remarque. Si $n = 2$, une trajectoire est représentée par une courbe du plan.

Exemple. Donner l'ensemble des trajectoires du système différentiel linéaire

$$(S) : \begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_3' = -x_1 - 2x_2 + x_3 \end{cases}$$

États d'équilibre

Définition.

On appelle **point d'équilibre** ou **état d'équilibre** d'un système différentiel $X' = AX$ toute solution constituée de fonctions constantes. On a alors l'équivalence :

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ est un point d'équilibre} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

On parle parfois de **point critique** ou de **point stationnaire**.

Remarque. La trajectoire d'un état d'équilibre est donc réduite à un point.

Méthode.

Pour déterminer les états d'équilibre d'un système différentiel $X' = AX$, il suffit de résoudre le système linéaire suivant :

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Exercice. Déterminer les états d'équilibres du système différentiel linéaire

$$(S) : \begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_3' = -x_1 - 2x_2 + x_3 \end{cases}$$

Propriété 14 (État d'équilibre lorsque la matrice est inversible)

Une matrice A est inversible si et seulement si l'unique point d'équilibre du système différentiel linéaire $X' = AX$ est le point $(0, \ldots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Convergence d'une trajectoire

Définition.

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une solution d'un système différentiel linéaire $X' = AX$. Soit $(\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$.
On dit que la trajectoire $\{(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ **converge** vers $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\lim_{t \to +\infty} x_i(t) = \ell_i.$$

S'il n'existe pas de tel n-uplet $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$, alors on dit que la trajectoire **diverge**.

Propriété 15 (Spectre et convergence des trajectoires)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **diagonalisable**. On considère le système différentiel linéaire $X' = AX$.

(1) Si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires du système convergent vers un point d'équilibre et on dit que ces points d'équilibres sont **stables**.

(2) Si A possède au moins une valeur propre strictement positive, alors il existe des trajectoires divergentes.

Exercice. Les trajectoires du système différentiel linéaire

$$(S) : \begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_3' = -x_1 - 2x_2 + x_3 \end{cases}$$

sont-elles convergentes ? Ses points d'équilibres sont-ils stables ?

Cas particulier. Plaçons-nous dans le cas où $n = 2$ et où $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable. Il existe donc $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On a alors :

$$X' = AX \Leftrightarrow X' = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}X.$$

A un changement de variable près (et donc un changement de base près), on a donc à résoudre un système différentiel linéaire

$$X' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} X \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \lambda_1 x \\ y' = \lambda_2 y \end{cases} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = x(0)e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y(0)e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

En supposant $x(0) \neq 0$ (sinon $x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$), on a alors :

$$t = \frac{1}{\lambda_1} \ln\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right)$$

ce qui donne, en injectant cette formule dans celle donnant $y(t)$:

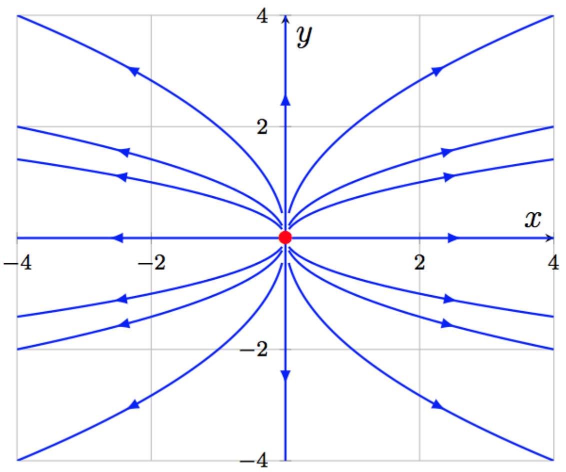
$$y(t) = y(0)\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

On peut faire disparaître la dépendance en t pour ne garder que la relation entre y et x (c'est l'équation des trajectoires) :

$$y = y(0)\left(\frac{x}{x(0)}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

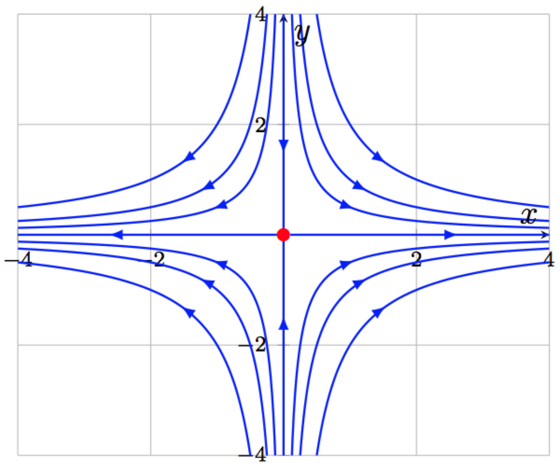
Faisons le dessin des trajectoires en fonction du signe des valeurs propres λ_1 et λ_2 (les points d'équilibres sont représentés en rouge).

- Cas où $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$:



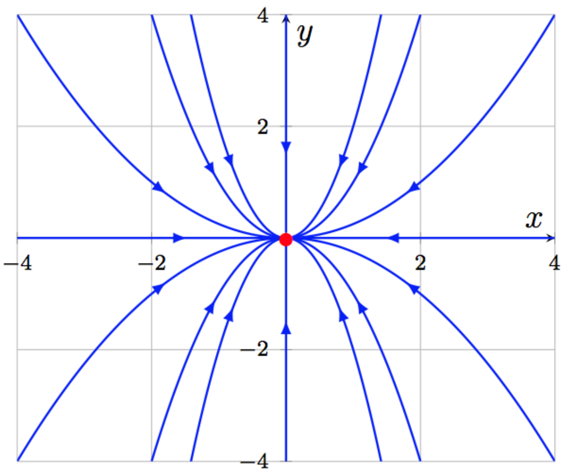
Aucune trajectoire non stationnaire ne converge. L'unique point d'équilibre $(0,0)$ *est instable.*

- Cas où $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$:



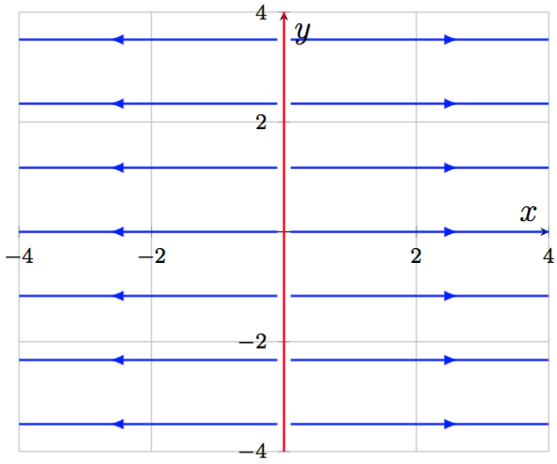
Toutes les trajectoires divergent sauf deux qui converge vers l'unique point d'équilibre $(0,0)$*. On dit dans cette situation que le point d'équilibre est un point selle.*

- Cas où $0 > \lambda_1 > \lambda_2$:



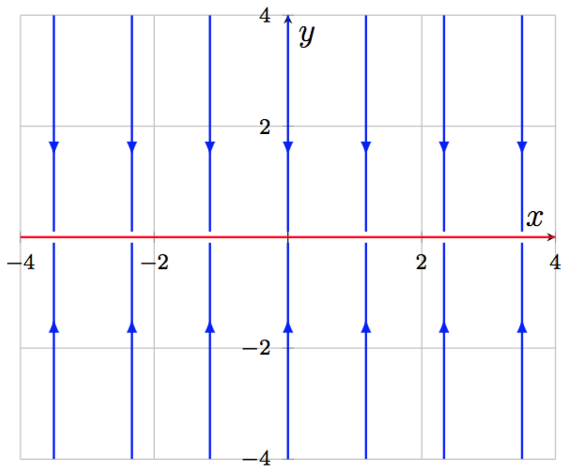
Toutes les trajectoires convergent vers l'unique point d'équilibre $(0,0)$ *qui est donc stable.*

- Cas où $\lambda_1 > \lambda_2 = 0$:



Aucune trajectoire non stationnaire ne converge. Il y a une infinité de points d'équilibres (l'axe des ordonnées), tous instables.

- Cas où $0 = \lambda_1 > \lambda_2$:



Toutes les trajectoires convergent. Il y a une infinité de points d'équilibres (l'axe des abscisses), tous stables.

Tableau récapitulatif de la nature des points d'équilibre :

$\lambda_1 \setminus \lambda_2$	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 > 0$
$\lambda_1 < 0$	stable	stables	selle
$\lambda_1 = 0$	stables	stables	instables
$\lambda_1 > 0$	selle	instables	instable