Chapitre 16

Fonctions de deux variables

Compétences attendues.

- ✓ Montrer qu'une fonction f est continue ou $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^2$.
- ✓ Calculer les dérivées partielles d'une fonction.
- ✓ Déterminer les points critiques d'une fonction.
- ✓ Déterminer la nature (extremum ou non) des points critiques d'une fonction.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECG au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 L'ensemble $\mathbb{R}^2$

1.1 Distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$

Définition.

Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points de $\mathbb{R}^2$.
On appelle **distance euclidienne** de A à B le réel $d(A, B)$ défini par :

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Remarque. $d(A, B)$ représente la longueur du segment $[AB]$. En effet :

Propriété 1 (de la distance euclidienne)

Soient A, B, C trois points de $\mathbb{R}^2$.

(1) $d(A, B) = d(B, A)$ (*symétrie*),

(2) $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ (*séparation*),

(3) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ (*inégalité triangulaire*).

Définition.

Soit $A = (x_A, y_A)$ un point de $\mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

- On appelle **boule ouverte** de centre A et de rayon r l'ensemble :

$$\mathscr{B}(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) < r\} = \{(x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 < r^2\}.$$

- On appelle **boule fermée** de centre A et de rayon r l'ensemble :

$$\mathscr{B}_f(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) \leq r\} = \{(x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 \leq r^2\}.$$

1.2 Topologie de $\mathbb{R}^2$

Définition.

Une partie Ω est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ si pour tout $A \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que :

$$\mathscr{B}(A, r) \subset \Omega.$$

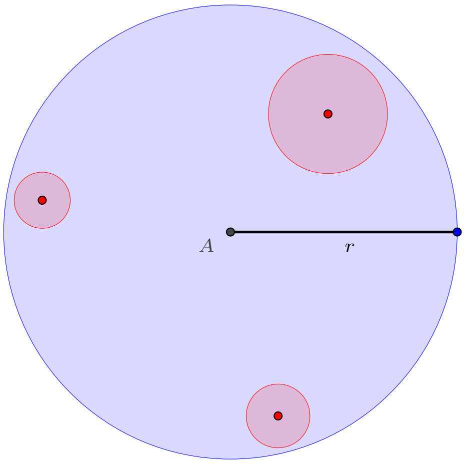
Autrement dit, une partie Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si pour tout $A \in \Omega$, les points suffisamment proches de A sont aussi dans Ω.

Propriété 2 (Caractérisation des ouverts)

Ω est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si **aucun** point de la frontière de Ω n'appartient à Ω.

Exemples.

1. $\emptyset$ et $\mathbb{R}^2$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
2. Un ensemble de la forme $]a, b[\times]c, d[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Un ensemble défini à l'aide d'inéquations strictes est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   Par exemple, une boule ouverte $\mathscr{B}(A, r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On peut le vérifier graphiquement :



Définition.

Une partie Ω est un **fermé** de $\mathbb{R}^2$ si son complémentaire est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Propriété 3 (Caractérisation des fermés)

Ω est un **fermé** de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si **tous** les points de la frontière de Ω appartiennent à Ω.

Exemples.

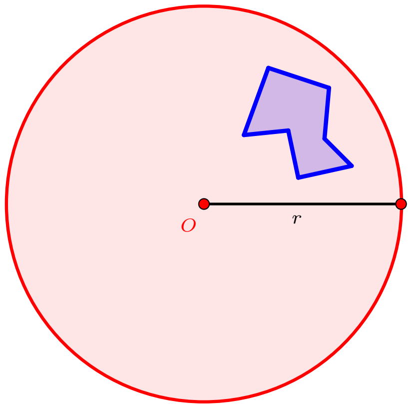
1. $\emptyset$ et $\mathbb{R}^2$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.
2. Un ensemble de la forme $[a, b] \times [c, d]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
3. Un ensemble défini à l'aide d'inéquations larges est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
   Par exemple, une boule fermée $\mathscr{B}_f(A, r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Définition.

Une partie Ω de $\mathbb{R}^2$ est **bornée** si Ω est incluse dans une boule fermée de centre $O = (0, 0)$, c'est-à-dire si :

$$\exists r > 0, \quad \Omega \subset \mathscr{B}_f(O, r).$$

Exemple. Voici en bleu une partie bornée de $\mathbb{R}^2$:



Exercice.

1. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles ouvertes ? fermées ? bornées ?

$$\Omega_1 = [0,1] \times [1,3] \qquad \Omega_2 =]0,1] \times [1,3[\qquad \Omega_3 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$$
$$\Omega_4 = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_- \qquad \Omega_5 = [0,1] \times \mathbb{R} \qquad \Omega_6 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

2. Représenter les parties suivantes puis préciser leurs propriétés topologiques :

$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \qquad \Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y \leq 3\}$$
$$\Omega_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq e^x\} \qquad \Omega_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$$

2 Généralités sur les fonctions de deux variables

2.1 Définition

Définition.

On appelle **fonction de deux variables** toute fonction f définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$:

$$f : (x,y) \in \Omega \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}.$$

Exemples.

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 - 4xy^2$.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2) + 2e^x$.
- $h : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}$ sur le domaine $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$.

Définition.

- On appelle **fonction polynomiale** toute fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, combinaison linéaire de fonctions de la forme $(x,y) \mapsto x^i y^j$, où i et j sont des entiers naturels.
- On appelle **fonctions coordonnées** les deux fonctions polynomiales $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$.
- On appelle **fonction affine** toute fonction polynomiale de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto ax + by + c$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exemple. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 - 4xy^2$ est une fonction polynomiale.

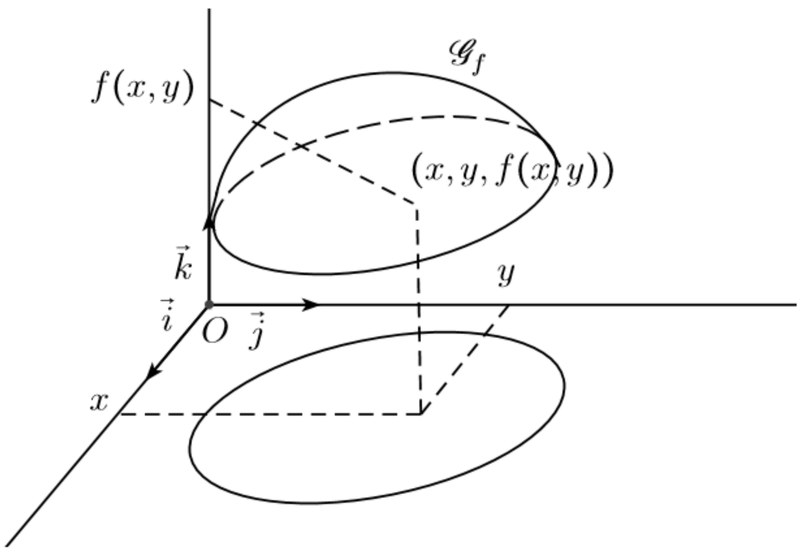
2.2 Graphe

Définition.

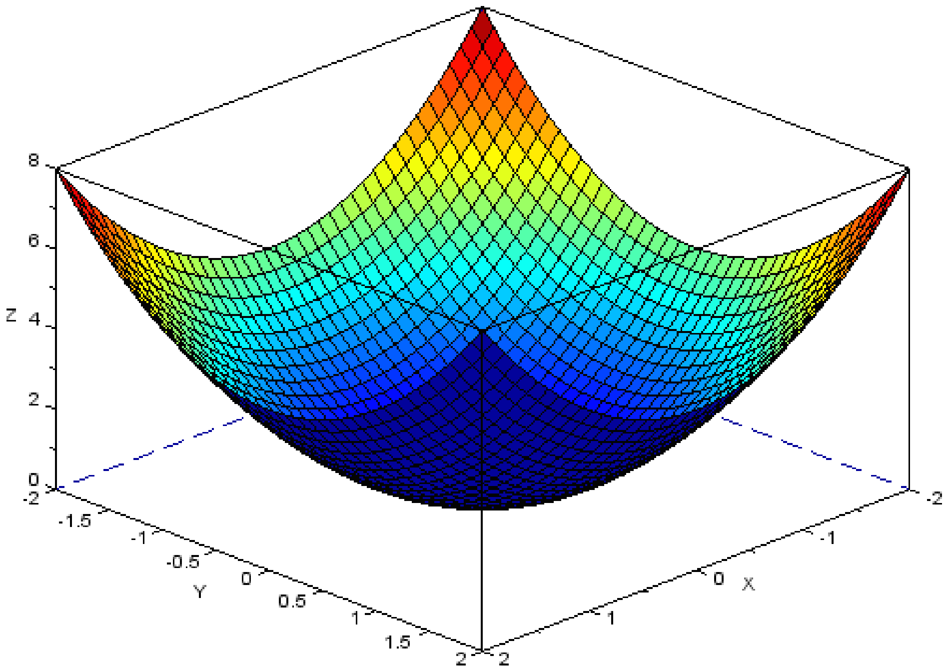
Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On appelle **graphe** de f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\mathscr{G}_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \Omega \text{ et } z = f(x,y)\}.$$

Représentation graphique. Le graphe de f est une surface qu'on représentera dans l'espace $\mathbb{R}^3$.



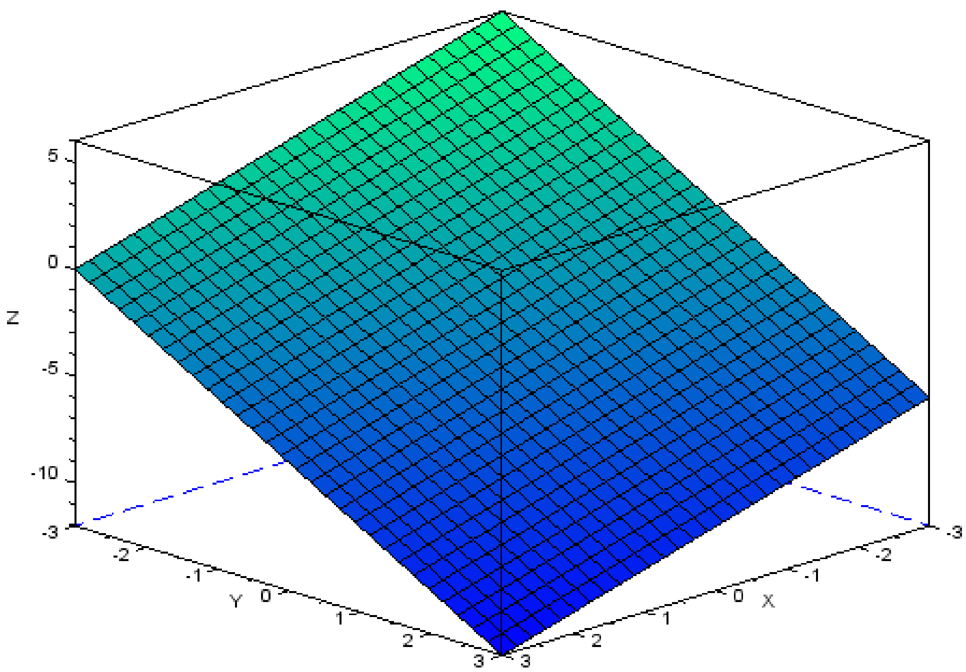
Exemple. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$. Le graphe de f est :



Paraboloïde elliptique.

Remarque. Cas des fonctions affines.

- Supposons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction affine, c'est-à-dire de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Le graphe de f est la droite (affine) du plan d'équation $y = ax + b$.
- Supposons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction affine de la forme $f(x, y) = ax + by + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Le graphe de f est alors un plan (affine) de l'espace d'équation $z = ax + by + c$.



Exemple d'un plan affine.

2.3 Lignes de niveau

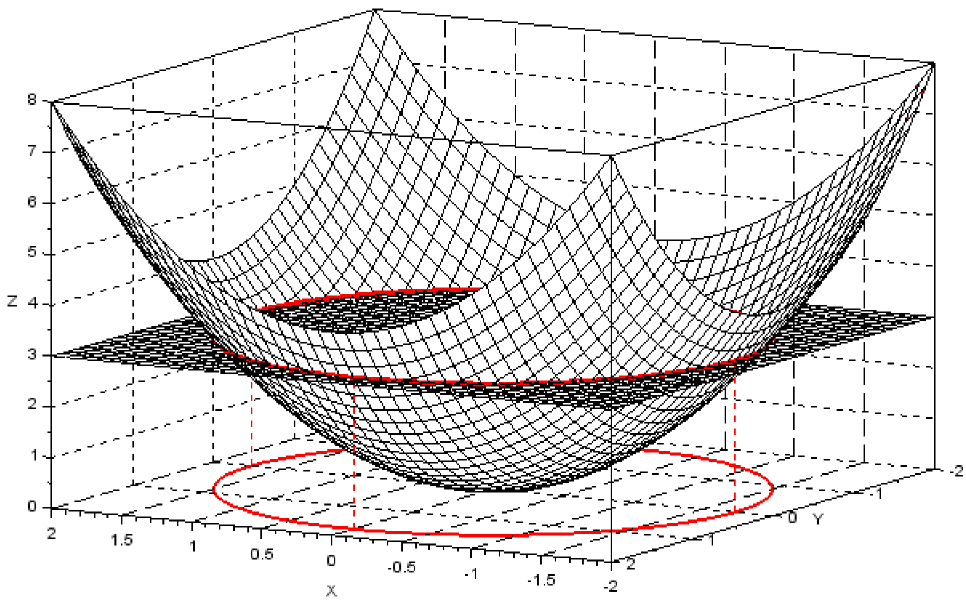
Définition.

Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle **ligne de niveau** λ de f l'ensemble des points $(x, y) \in \Omega$ qui vérifient l'équation :

$$f(x, y) = \lambda.$$

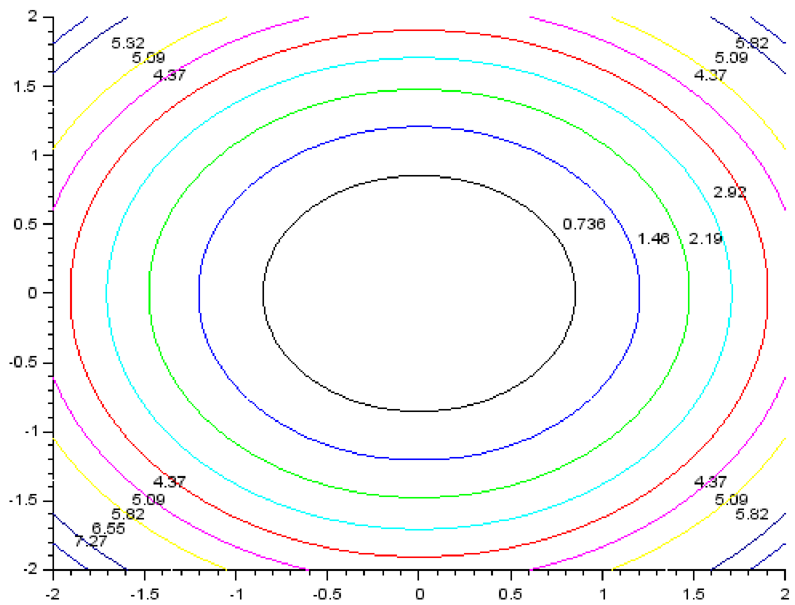
Remarques.

- La ligne de niveau λ de f s'obtient en faisant l'intersection du graphe $\mathscr{G}_f$ de f avec le plan horizontal d'équation $z = \lambda$.



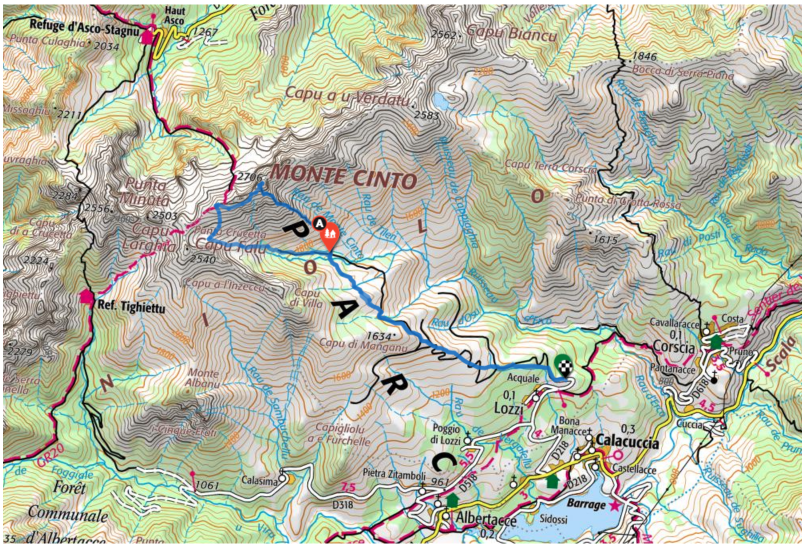
Ligne de niveau $\lambda = 3$ de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

- L'indication d'un nombre suffisant de lignes de niveau permet d'avoir une représentation assez fidèle du graphe de la fonction.



Lignes de niveau de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

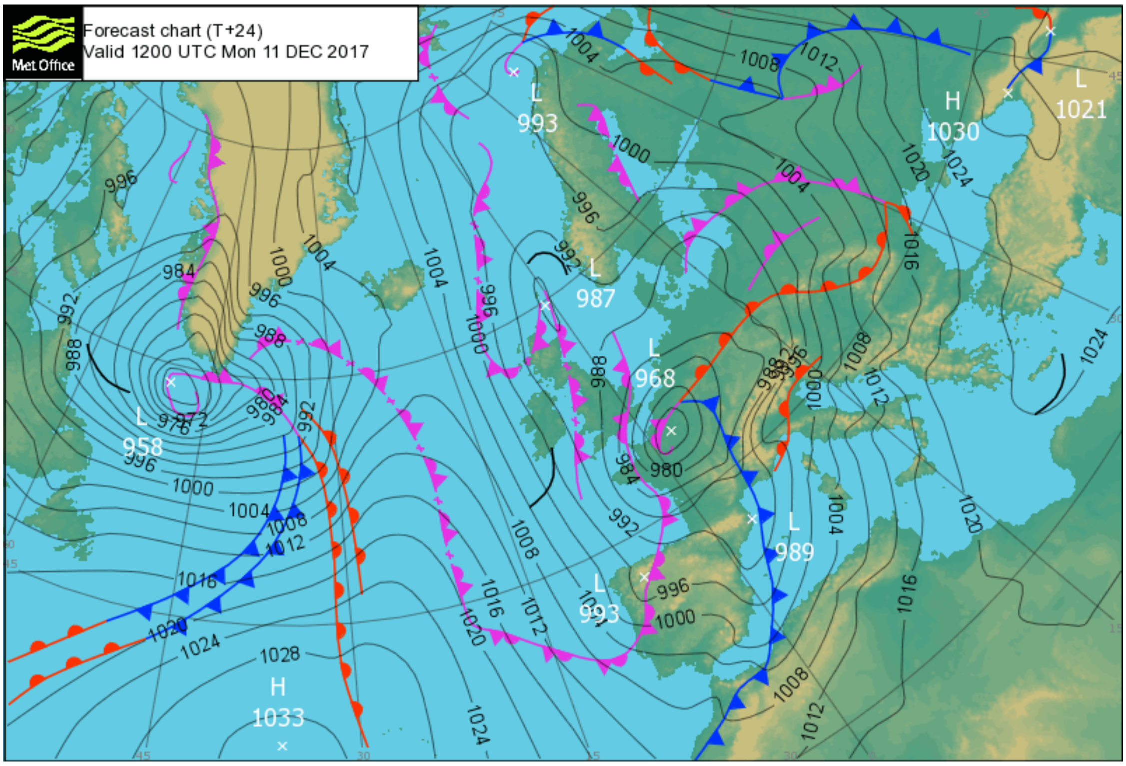
Exemple. Si f est la fonction qui à la longitude et la latitude associe l'altitude, alors les lignes de niveau représentent les points qui sont à la même altitude : si on se promène sur une ligne de niveau, on ne monte ni ne descend. Ce sont ces lignes (dîtes de niveau) qui sont représentées sur les cartes topographiques.



Carte topographique du Monte Cinto (plus haut sommet de Corse).

Votre professeur au sommet du Monte Cinto !

Exemple. Si f est la fonction qui à la longitude et à la latitude associe la pression (au niveau de la mer), alors les lignes de niveau relient des points d'égale pression. Ces lignes sont appelées en météorologie des *courbes isobares.*



Carte de surface.

Un ensemble d'isobares incurvées entourant une zone de basse (resp. haute) pression indique une dépression (resp. anticyclone), repéré par un L (resp. H) sur la carte de surface. La vitesse du vent est fonction de l'écartement des isobares : plus les isobares sont serrées, plus la pression varie rapidement, plus le vent souffle fort. Pour apprendre à lire une carte de pression atmosphérique, on pourra consulter ce lien.

3 Continuité

3.1 Définition

Définition.

Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est **continue** en un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ si :

$$\lim_{d((x,y),(x_0,y_0)) \to 0} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

- On dit que f est **continue** sur Ω lorsque f est continue en tout point de Ω.

Propriété 4 (Continuité des fonctions polynomiales)

Les fonctions polynomiales de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

3.2 Opérations sur les fonctions continues

Propriété 5 (Opérations sur les fonctions continues)

(1) On suppose que f et g sont deux fonctions continues sur une partie Ω de $\mathbb{R}^2$.

- Les fonctions λf (pour λ réel), $f + g$ et $f \times g$ sont continues sur Ω.
- Si de plus g ne s'annule pas sur Ω, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur Ω.

(2) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

- f est continue sur une partie Ω de $\mathbb{R}^2$,
- f est à valeurs dans I : $\forall (x,y) \in \Omega,\ f(x,y) \in I$,
- φ est continue sur I.

Alors $\varphi \circ f$ est continue sur Ω.

Exercice. Justifier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = x\left((\ln(x))^2 + y^2\right).$$

4 Dérivées partielles d'ordre 1

4.1 Dérivées partielles, gradient

Définition.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 1** par rapport à x en $(x_0, y_0) \in \Omega$ si la fonction $f_{\bullet,y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0. On note alors :
$$\partial_1(f)(x_0, y_0) = (f_{\bullet,y_0})'(x_0).$$
- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 1** par rapport à y en $(x_0, y_0) \in \Omega$ si la fonction $f_{x_0,\bullet} : y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0. On note alors :
$$\partial_2(f)(x_0, y_0) = (f_{x_0,\bullet})'(y_0).$$
- Si f admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et à y en (x_0, y_0), on appelle **gradient** de f en (x_0, y_0) la matrice colonne définie par :
$$\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x_0, y_0) \\ \partial_2(f)(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Remarque. Les notations $\dfrac{\partial}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}$ sont aussi communément utilisées pour les dérivées partielles d'ordre 1. Le programme officiel privilégie cependant les notations ∂_1 et ∂_2.

Méthode.

- *En pratique, pour calculer $\partial_1(f)(x, y)$, on dérive f par rapport à la variable x en considérant la variable y comme une constante.*
- *De même, pour calculer $\partial_2(f)(x, y)$, on dérive f par rapport à la variable y en considérant la variable x comme une constante.*

Exercice. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :
$$f(x, y) = x\left((\ln(x))^2 + y^2\right).$$

4.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition.

On dit que f est de **classe** $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ si :

- f admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et à y en tout point de Ω ;
- Ses dérivées partielles

$$\partial_1(f) : (x,y) \in \Omega \mapsto \partial_1(f)(x,y) \qquad \text{et} \qquad \partial_2(f) : (x,y) \in \Omega \mapsto \partial_2(f)(x,y)$$

  sont continues sur Ω.

Propriété 6 ($\mathscr{C}^1$ implique continue)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Si f est de **classe** $\mathscr{C}^1$ sur Ω, alors f est **continue** sur Ω.

Propriété 7 (Classe $\mathscr{C}^1$ des fonctions polynomiales)

Les fonctions polynomiales de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Propriété 8 (Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$)

(1) On suppose que f et g sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.

- Les fonctions λf (pour λ réel), $f+g$ et $f \times g$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.
- Si de plus g ne s'annule pas sur Ω, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

(2) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\varphi : I \to \mathbb{R}$. On suppose que :

- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$,
- f est à valeurs dans I : $\forall (x,y) \in \Omega,\ f(x,y) \in I$,
- φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

Exercice. Justifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = x\left((\ln(x))^2 + y^2\right)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$.

4.3 Développement limité d'ordre 1

Rappel. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor-Young d'ordre 1, elle admet un développement limité d'ordre 1 en tout réel x_0 qui s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$$

ou encore en posant $h = x - x_0$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On généralise ici ces résultats aux fonctions de deux variables :

Théorème 9 (Formule de Taylor-Young d'ordre 1)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \Omega$.
Alors il existe une fonction ε continue en $(0, 0)$, vérifiant $\varepsilon(0, 0) = 0$ et telle que pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ suffisamment proche de $(0, 0)$, on a :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + {}^t(\nabla(f)(x_0, y_0)) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2 + k^2} \times \varepsilon(h, k) \\ &= \underbrace{f(x_0, y_0) + \partial_1(f)(x_0, y_0) \times h + \partial_2(f)(x_0, y_0) \times k}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{\sqrt{h^2 + k^2} \times \varepsilon(h, k)}_{\text{reste}}. \end{aligned}$$

Une telle écriture est unique, appelée le **développement limité d'ordre 1** de f au point (x_0, y_0).

5 Dérivées partielles d'ordre 2

5.1 Dérivées partielles d'ordre 2, matrice hessienne

Définition.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.
On dit que f admet des **dérivées partielles d'ordre 2** si $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$ admettent des dérivées partielles d'ordre 1. On note alors :

$$\partial^2_{1,1}(f) = \partial_1(\partial_1(f)), \qquad \partial^2_{2,1}(f) = \partial_2(\partial_1(f)), \qquad \partial^2_{1,2}(f) = \partial_1(\partial_2(f)), \qquad \partial^2_{2,2}(f) = \partial_2(\partial_2(f)).$$

Remarque. Les notations $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ sont aussi communément utilisées pour les dérivées partielles d'ordre 2. Le programme officiel privilégie cependant les notations $\partial^2_{1,1}, \partial^2_{2,1}, \partial^2_{1,2}, \partial^2_{2,2}$.

Exercice. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$f(x, y) = x\left((\ln(x))^2 + y^2\right).$$

Définition.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre 2.
On appelle **matrice hessienne** de f en $(x_0, y_0) \in \Omega$ la matrice définie par :

$$\nabla^2(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(x_0, y_0) & \partial^2_{1,2}(f)(x_0, y_0) \\ \partial^2_{2,1}(f)(x_0, y_0) & \partial^2_{2,2}(f)(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Attention.

Attention aux confusions :

- Le gradient $\nabla(f)(x_0, y_0)$ est un vecteur contenant les dérivées partielles d'ordre 1 en (x_0, y_0).
- La hessienne $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ est une matrice contenant les dérivées partielles d'ordre 2 en (x_0, y_0).

5.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

Définition.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.
On dit que f est une fonction de **classe** $\mathscr{C}^2$ sur Ω si :

- f admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et y en tout point de Ω ;
- Ses dérivées partielles sont des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}$.

Propriété 10 ($\mathscr{C}^2$ implique $\mathscr{C}^1$)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Si f est de **classe** $\mathscr{C}^2$ sur Ω, alors f est de **classe** $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

Remarque. On retiendra le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} f \text{ de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \Omega & \Longrightarrow & f \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \Omega & \Longrightarrow & f \text{ continue sur } \Omega \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \\ \text{Dérivées partielles d'ordre 2} & & \text{Dérivées partielles d'ordre 1} & & \\ \text{continues sur } \Omega & & \text{continues sur } \Omega & & \end{array}$$

Propriété 11 (Classe $\mathscr{C}^2$ des fonctions polynômiales)

Les fonctions polynomiales de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Propriété 12 (Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$)

(1) On suppose que f et g sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.

- Les fonctions λf (pour λ réel), $f + g$ et $f \times g$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.
- Si de plus g ne s'annule pas sur Ω, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.

(2) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\varphi : I \to \mathbb{R}$. Supposons que :

- f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert Ω, à valeurs dans I ;
- φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

Alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.

Exercice. Justifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :
$$f(x,y) = x\left((\ln(x))^2 + y^2\right)$$
est de classe $\mathscr{C}^2$.

Théorème 13 (de Schwarz)

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, alors pour tout $(x,y) \in \Omega$, on a :
$$\partial^2_{2,1}(f)(x,y) = \partial^2_{1,2}(f)(x,y).$$

Conséquences. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω, alors :

- l'ordre dans lequel on dérive (par rapport à la première puis la deuxième variable ou l'inverse) n'a pas d'importance ;
- pour tout $(x_0, y_0) \in \Omega$, la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0,y_0)$ est symétrique et donc diagonalisable.

5.3 Développement limité d'ordre 2

Rappel. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor-Young d'ordre 2, elle admet un développement limité d'ordre 2 en tout réel x_0 qui s'écrit :
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\varepsilon(x-x_0) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0$$
ou encore en posant $h = x - x_0$:
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$
On généralise ici ces résultats aux fonctions de deux variables :

Théorème 14 (Formule de Taylor-Young d'ordre 2)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0,y_0) \in \Omega$.
Alors il existe une fonction ε continue en $(0,0)$, vérifiant $\varepsilon(0,0) = 0$ et telle que pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ suffisamment proche de $(0,0)$, on a :
$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0,y_0) + {}^t(\nabla(f)(x_0,y_0)) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \times \nabla^2(f)(x_0,y_0) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &\quad + (h^2+k^2) \times \varepsilon(h,k) \\ &= f(x_0,y_0) + \underbrace{\partial_1(f)(x_0,y_0) \times h + \partial_2(f)(x_0,y_0) \times k}_{\text{termes d'ordre 1 de la partie régulière}} \\ &\quad \underbrace{+ \partial^2_{1,1}(f)(x_0,y_0) \times \frac{h^2}{2} + \partial^2_{1,2}(f)(x_0,y_0) \times hk + \partial^2_{2,2}(f)(x_0,y_0) \times \frac{k^2}{2}}_{\text{termes d'ordre 2 de la partie régulière}} \\ &\quad + \underbrace{(h^2+k^2) \times \varepsilon(h,k)}_{\text{reste}}. \end{aligned}$$

Une telle écriture est unique, appelée le **développement limité d'ordre 2** de f au point (x_0,y_0).

6 Extrema d'une fonction de deux variables

6.1 Extrema locaux, extrema globaux

Définition.

Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction et $(x_0, y_0) \in \Omega$.

- On dit que f admet un **minimum global** en (x_0, y_0) (resp. **maximum global** en (x_0, y_0)) lorsque :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad (\text{resp. } f(x, y) \leq f(x_0, y_0)).$$

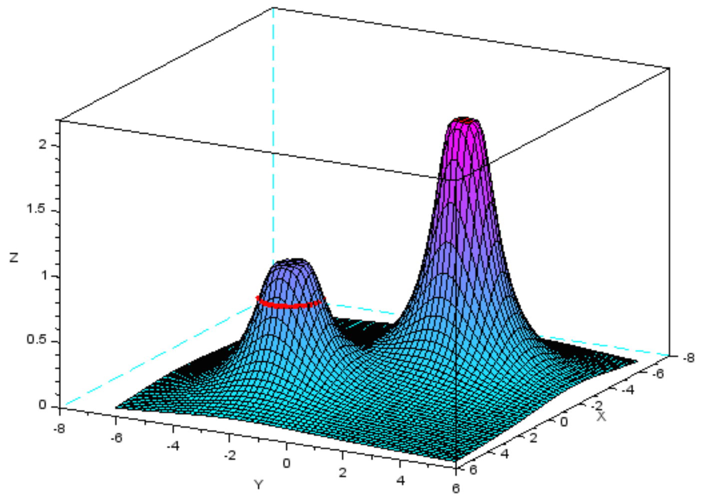
- On dit que f admet un **extremum global** en (x_0, y_0) lorsque f admet un minimum global ou un maximum global en (x_0, y_0).
- On dit que f admet un **minimum local** en (x_0, y_0) (resp. **maximum local** en (x_0, y_0)) lorsqu'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad (x, y) \in \mathscr{B}((x_0, y_0), r) \quad \Rightarrow \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad (\text{resp. } f(x, y) \leq f(x_0, y_0)).$$

- On dit que f admet un **extremum local** en (x_0, y_0) lorsque f admet un minimum local ou un maximum local en (x_0, y_0).

Remarque. Un extremum global est un extremum local.

Exemple. Considérons la fonction f dont le graphe $\mathscr{G}_f$ est représenté ci-dessous :



f admet un maximum global en $(-2, 2)$, et un maximum local en $(2, -2)$ (en effet, pour tout $x \in \mathscr{B}((2, -2), 1)$, c'est-à-dire graphiquement pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ à l'intérieur du disque rouge, on a $f(x) \leq f(2, -2)$).

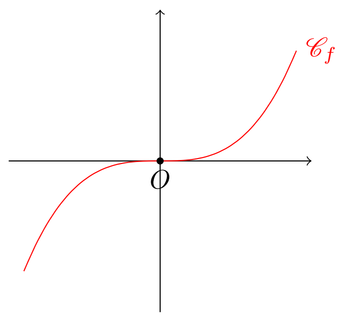
6.2 Condition nécessaire

Rappel. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b[$.
Alors on a :

$$f \text{ admet un extremum en } a \quad \Rightarrow \quad f'(a) = 0.$$

Attention.

La réciproque est **fausse** : par exemple, la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ satisfait $f'(0) = 0$, mais f n'admet pas d'extremum en 0.



Courbe représentative de $x \mapsto x^3$.

On généralise ici ces résultats aux fonctions de deux variables :

Définition.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.
On appelle **point critique** de f tout point $(x_0, y_0) \in \Omega$ vérifiant l'équation :

$$\nabla(f)(x_0, y_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \partial_1(f)(x_0, y_0) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x_0, y_0) & = & 0 \end{array} \right.$$

Théorème 15 (Condition nécessaire d'extremum local)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un **ouvert** Ω de $\mathbb{R}^2$.
Si f admet un extremum local en (x_0, y_0), **alors** (x_0, y_0) est un point critique de f.

Attention.

La réciproque est **fausse** : si (x_0, y_0) est un point critique de f, f n'admet pas nécessairement un extremum local en (x_0, y_0).

Exemple. La fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$ est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

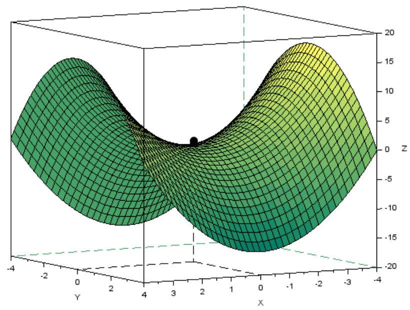
$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}.$$

Ainsi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique si et seulement si :

$$\nabla f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (0, 0).$$

f a donc un unique point critique en $(0, 0)$, qui vaut $f(0, 0) = 0$. Mais 0 n'est ni un maximum, ni un minimum pour f puisque :

$$f(0, y) = -y^2 < 0 < x^2 = f(x, 0).$$



Graphe de $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

Exercice. Déterminer les points critiques de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$f(x, y) = x\left((\ln(x))^2 + y^2\right).$$

6.3 Condition suffisante

Théorème 16 (Condition suffisante d'extremum local)

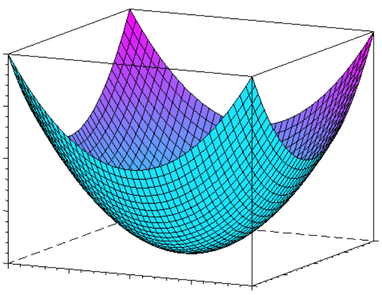
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point critique de f. Alors :

- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont **strictement positives**, alors le point critique est un **minimum local** ;
- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont **strictement négatives**, alors le point critique est un **maximum local** ;
- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont **non nulles** et de **signes opposées**, alors le point critique **n'est pas un extremum local** ;
- Si une des valeurs propre de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ est nulle, alors on ne peut rien conclure par l'étude de la hessienne.

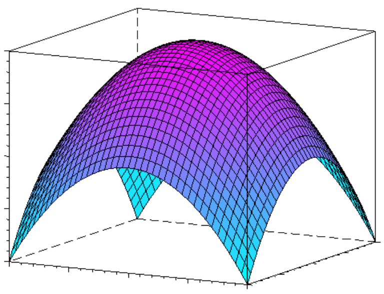
Preuve.

□

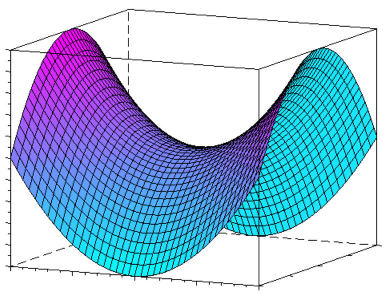
Remarque. Au voisinage d'un point critique (x_0, y_0), le graphe de f possède l'allure suivante, suivant le signe des valeurs propres λ_1 et λ_2 de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$:



$\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.



$\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.



$\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$.

Définition.

Dans le cas où les deux valeurs propres de la hessienne sont non nulles de signes contraires, on dit qu'on a un **point selle** ou **point col**.

Exemple d'un col en montagne.

Méthode.

Pour déterminer les extrema locaux d'une fonction f sur un ouvert Ω, on procèdera comme suit :

- *on justifie, si ce n'est pas dit dans l'énoncé, que Ω est ouvert ;*
- *on justifie que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω ;*
- *on calcule le gradient de f, puis on cherche les points critiques ;*
- *on calcule la hessienne de f en le (ou les) points critiques, puis on détermine ses valeurs propres ;*
- *on identifie la nature du point critique (x_0, y_0) à l'aide du signe des valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$.*

Exercice. Étudier les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = x\left((\ln(x))^2 + y^2\right).$$

6.4 Fonctions continues sur un fermé borné

Rappel. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur le **segment** $[a, b]$ (c'est-à-dire un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$). Alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes. En d'autres termes, f admet un maximum global et un minimum global sur le segment $[a, b]$, de sorte qu'il existe $x_0, x_1 \in [a, b]$ tels que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1).$$

Ce résultat se généralise au cas des fonctions de deux variables :

Théorème 17 (Fonction continue sur un fermé borné)

Soit f une fonction **continue** sur une partie Ω **fermée** et **bornée** de $\mathbb{R}^2$. Alors f admet un maximum global et un minimum global sur Ω, de sorte qu'il existe (x_0, y_0) et $(x_1, y_1) \in \Omega$ tels que :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1).$$

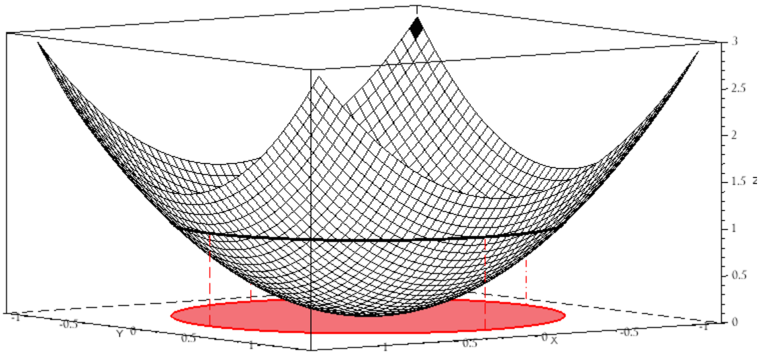
Remarque. Ce théorème garantit l'existence des extrema, mais ne dit pas comment les trouver !

Méthode.

Pour étudier les extrema globaux d'une fonction f continue sur un fermé borné Ω de $\mathbb{R}^2$, on procèdera comme suit :

- *on détermine le plus grand ouvert Θ inclus dans Ω (il s'agit en général de remplacer inégalités larges par inégalités strictes) ;*
- *si f est $\mathscr{C}^1$ sur Θ, on détermine ses points critiques sur Θ ;*
- *on étudie "à la main" les extrema de f sur la frontière $F = \Omega \setminus \Theta$ de Ω ;*
- *on compare la valeur de f aux points critiques de Θ et aux extrema sur la frontière de Ω pour conclure.*

Exercice. On considère la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ définie sur la boule fermée $\mathscr{B}_f(0, 1)$.



1. Justifier l'existence d'un maximum et d'un minimum global pour f sur $\mathscr{B}_f(0, 1)$.

2. Déterminer en quels points ces extrema sont atteint. Que remarque-t-on ?