Chapitre 2

Calcul matriciel

Compétences attendues.

✓ Maitriser les différentes opérations sur les matrices (somme, produit par un réel, produit de deux matrices, transposée d'une matrice).

✓ Montrer qu'un polynôme est annulateur d'une matrice.

✓ Calculer les puissances d'une matrice carrée A à l'aide de l'une des méthodes suivantes :

- en déterminant une formule sur les puissances de A puis en la démontrant par récurrence,
- avec la formule du binôme de Newton,
- à l'aide d'un polynôme annulateur de A,
- en se ramenant aux puissances d'une matrice diagonale.

✓ Montrer qu'une matrice carrée A est ou non inversible à l'aide de l'une des méthodes suivantes :

- en faisant un produit matriciel si l'inverse est suggérée,
- à l'aide d'un polynôme annulateur de A,
- en exhibant une combinaison linéaire sur les lignes ou les colonnes de A,
- en appliquant la méthode du pivot de Gauss à A.

✓ Déterminer les valeurs propres d'une matrice carrée A à l'aide de l'une des méthodes suivantes :

- en utilisant la définition des valeurs propres si les vecteurs propres sont donnés
- à l'aide d'un polynôme annulateur,
- en appliquant la méthode du pivot de Gauss à la matrice $A - \lambda I_n$.

✓ Déterminer les sous-espaces propres d'une matrice.

✓ Prouver qu'une matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Rappels et compléments sur le calcul matriciel

1.1 Opérations sur les matrices

Définition.

- Une **matrice** de taille $n \times p$ à coefficients réels est un tableau de réels de n lignes et p colonnes. Si $n = p$, la matrice est dite **carrée**.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (ou simplement $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si $n = p$).

Notations.

- Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on notera $[A]_{i,j}$ le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de A.
- On note $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la **matrice identité**.
- On note $0_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la **matrice nulle**.

Définition.

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite :

- **triangulaire supérieure** si, pour tout $i > j$, $[A]_{i,j} = 0$.
- **triangulaire inférieure** si, pour tout $i < j$, $[A]_{i,j} = 0$.
- **diagonale** si, pour tout $i \neq j$, $[A]_{i,j} = 0$.

Définition.

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les matrices $A + B$ et $\lambda \cdot A$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad [A+B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j} \quad \text{et} \quad [\lambda \cdot A]_{i,j} = \lambda [A]_{i,j}.$$

Définition.

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On définit la matrice $C = A \times B$ de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad [C]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k} [B]_{k,j}$$

Attention.

1. Pour pouvoir effectuer le produit de A par B, il faut impérativement que le nombre de colonnes de A soit égale au nombre de lignes de B.
2. On ne sait faire que des combinaisons linéaires et des produits de matrices. Il n'y a pas d'autre opération. En particulier, la division de matrices n'existe pas !

Propriété 1 (du produit matriciel)

Soient A, B, C des matrices. Dans le cas où les produits matriciels sont bien définis, on a :

- Associativité : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.
- Distributivité : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot (A \times B) = (\lambda \cdot A) \times B = A \times (\lambda \cdot B)$.
- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $I_n \times A = A \times I_p = A$ et $0_n \times A = A \times 0_p = 0_{n,p}$.

Attention.

- Le produit matriciel **n'est pas commutatif**. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  On veillera donc à toujours conserver l'ordre des facteurs dans un produit de plusieurs matrices !

- Les formules habituelles de développement telles que les identités remarquables et la formule du binôme ne sont valables **que si les matrices commutent**. Par exemple, si $AB \neq BA$,

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

- Un produit de deux matrices peut-être nul sans qu'aucune des matrices ne soient nulles. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Il est possible de **factoriser** par une matrice, mais à condition qu'elle soit bien en facteur dans chacun des termes de la somme et du même côté (on parle de factorisation à gauche ou à droite par une matrice). En particulier,

$$\cancel{A^2 - 4A = A(A - 4)} \qquad \text{mais} \qquad A^2 - 4A = A \times A - A \times 4I_n = A(A - 4I_n).$$

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle **matrice transposée** de A la matrice notée ${}^tA \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!], \quad [{}^tA]_{i,j} = [A]_{j,i}.$$

Autrement dit, ${}^tA$ est obtenue à partir de A par échange de ses lignes et de ses colonnes.

Exemple. ${}^t\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Propriété 2 (de la transposition)

- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^t({}^tA) = A$.
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^t(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) = \lambda \cdot {}^tA + \mu \cdot {}^tB$.
- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\forall B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$.

1.2 Puissances d'une matrice carrée

Définition.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **puissance p-ième** de A la matrice, notée A^p, définie par :

- Si $p = 0$, $A^0 = I_n$.
- Si $p = 1$, $A^1 = A$.
- Si $p \geq 2$, $A^p = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{p \text{ fois}}$.

Attention.

1. Les formules sur les puissances de nombres réels non sont pas toutes valables sur les matrices :
$$A^p \times A^q = A^{p+q} \qquad \text{mais} \qquad \cancel{(A \times B)^p = A^p \times B^p}.$$
Cette dernière formule est seulement valable si A et B commutent !
2. Calculer les puissances d'une matrice n'est pas une question simple en général. En particulier, la puissance d'une matrice n'est SURTOUT pas égale à la matrice des puissances (sauf si elle est diagonale) !

Propriété 3 (Puissances d'une matrice triangulaire ou diagonale)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, resp. diagonale), dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & \cdots & \\ 0 & \lambda_2^p & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & (*) & \ddots & 0 \\ & \cdots & & \lambda_n^p \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

où $(*)$ sont des réels.

Méthode.

Pour calculer les puissances d'une matrice carrée M, on utilisera l'une des méthodes suivantes :

- ***Par récurrence*** *: En calculant les premières puissances de M, on obtient une formule générale qui semble être valable pour tout entier naturel. On démontre alors cette formule par récurrence.*
- ***Avec la formule du binôme de Newton*** *: On écrit $M = A+B$ où A et B sont deux matrices qui* ***commutent*** *(c'est-à-dire telles que $AB = BA$) et dont les puissances sont plus simples à calculer. On utilise alors la formule :*
$$M^p = (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}.$$
- ***En se ramenant aux puissances d'une matrice diagonale*** *: On écrit $M = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale, on démontre par récurrence que, pour tout entier naturel k, $M^k = PD^kP^{-1}$ et on obtient finalement M^p en faisant le produit matriciel.*

1.3 Polynômes d'une matrice carrée

Définition.

Soit $P(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
On note $P(A)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$P(A) = a_d A^d + a_{d-1} A^{d-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n.$$

Exemple. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(X) = X^2 + 3X - 10$. Alors $P(A) = A^2 + 3A - 10I_n$.

Attention.

Le terme constant a_0 dans $P(X)$ devient $a_0 I_n$ dans $P(A)$.

Propriété 4 (Polynôme d'une matrice carrée)

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(\lambda P + \mu Q)(A) = \lambda P(A) + \mu Q(A) \qquad \text{et} \qquad (P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A).$$

Remarque. Il est important de bien identifier les objets mathématiques concernés :

$$(\underbrace{P \times Q}_{\substack{\text{produit}\\ \text{de}\\ \text{polynômes}}})(A) = \underbrace{P(A) \times Q(A)}_{\text{produit de matrices}}.$$

Exemple. Comme $P(X) = X^2 + 3X - 10 = (X+5)(X-2)$, on a $P(A) = (A + 5I_n)(A - 2I_n)$.

Propriété 5 (Commutativité des polynômes d'une matrice carrée)

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les matrices $P(A)$ et $Q(A)$ commutent :

$$P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A).$$

En particulier, A commute avec toutes ses puissances et avec tous les polynômes en A.

Preuve.

$\square$

Définition.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
On dit que P est un **polynôme annulateur** de A si $P(A) = 0$.

Méthode.

La connaissance d'un polynôme annulateur $P \in \mathbb{R}_d[X]$ d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ peut permettre de calculer la puissance k-ième de A :

- *A l'aide d'une division euclidienne de X^k par P ;*
- *Par récurrence en écrivant A^k comme combinaison linéaire de $I_n, A, \ldots, A^{d-1}$.*

1.4 Matrices carrées inversibles

Définition.

Une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **inversible** s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

Une telle matrice B est alors unique. On l'appelle l'**inverse** de A et on la note A^{-1}.

Remarques. Si A est **inversible**, il est possible de **simplifier les égalités** qui contiennent A en facteur :

- Si $AC = AD$, on a en multipliant par A^{-1} à gauche :

$$AC = AD \quad \Rightarrow \quad A^{-1}(AC) = A^{-1}(AD) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(A^{-1}A)}_{=I_n} C = \underbrace{(A^{-1}A)}_{=I_n} D \quad \Rightarrow \quad C = D.$$

- Si $CA = DA$, on a en multipliant par A^{-1} à droite :

$$CA = DA \quad \Rightarrow \quad (CA)A^{-1} = (DA)A^{-1} \quad \Rightarrow \quad C\underbrace{(AA^{-1})}_{=I_n} = D\underbrace{(AA^{-1})}_{=I_n} \quad \Rightarrow \quad C = D.$$

Attention, il faut distinguer droite et gauche puisque le produit n'est pas commutatif.

Théorème 6 (Caractérisations des matrices inversibles)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) A est une matrice inversible ;

(2) Il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B \times A = I_n$ (et alors $A^{-1} = B$) ;

(3) Il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times B = I_n$ (et alors $A^{-1} = B$) ;

(4) Les colonnes (ou les lignes) de A sont linéairement indépendantes ;

(5) $\forall B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = B$ admet une unique solution (qui est $X = A^{-1}B$).

Propriété 7 (Inverse d'une matrice triangulaire ou diagonale)

(1) Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

(2) En particulier, une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est inversible si et seulement si $\lambda_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, et on a alors $D^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n})$.

Exemples.

- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible car elle est triangulaire supérieure et que tous ses coefficients diagonaux $1, -1, 2$ sont non nuls.
- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ est non inversible, car elle est triangulaire inférieure et que l'un de ses coefficients diagonaux est nul.

Méthode.

Voici différentes méthodes pour montrer qu'une matrice carrée quelconque $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible :

- ***Si on nous suggère l'inverse** : Il suffit de faire le produit des deux matrices.*
- ***Si on a trouvé un polynôme annulateur P de A** :*
  - *Si $P(0) \neq 0$, alors A est inversible. Pour le prouver, on met l'équation $P(A) = 0$ sous la forme $A \times B = I_n$ (et $A^{-1} = B$ est un polynôme en A).*
  - *Si $P(0) = 0$, alors A n'est en général pas inversible. Pour le prouver, on raisonne par l'absurde : on met l'équation $P(A) = 0$ sous la forme $A \times B = 0$, puis on multiplie par A^{-1} à gauche pour aboutir à une contradiction.*
- ***Si on veut montrer que A n'est pas inversible** : On vérifie si l'une des colonnes (ou des lignes) de A est combinaison linéaire des autres colonnes (ou lignes).*
- ***Dans le cas général** : On applique la méthode du pivot de Gauss.*

Exercice. Calculer le produit de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P(X) = X^2 + X - 2$ est un polynôme annulateur de C.

2. En déduire que C est inversible et déterminer son inverse.

Exercice. On considère la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P(X) = X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de D.

2. La matrice D est-elle inversible ?

Exercice. Justifier sans calcul que les matrices suivantes ne sont pas inversibles :

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriété 8 (de l'inverse)

(1) Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors A^{-1} l'est aussi et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(2) Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors ${}^tA$ l'est aussi et $({}^tA)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

(3) Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont inversibles, alors $A \times B$ l'est aussi et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

Remarque. On peut déduire de cette dernière propriété que :

- Si $A_1, \ldots, A_k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont inversibles, alors $A_1 \ldots A_k$ l'est aussi et $(A_1 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \ldots A_1^{-1}$.
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors A^p l'est aussi et $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$. On peut définir dans ce cas les puissances entières strictement négatives de A par :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ A^{-p} = (A^p)^{-1} = (A^{-1})^p.$$

2 Réduction des matrices carrées

2.1 Valeurs propres

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

- Un réel λ est appelé **valeur propre** de A s'il existe une matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AX = \lambda X$.
- Dans ce cas, on dit que la matrice X est un **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ.
- L'ensemble des valeurs propres d'une matrice A est appelé **spectre** de A et noté $Sp(A)$.

Exercice. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que X_1 et X_2 sont des vecteurs propres de A et déterminer les valeurs propres associées.

Théorème 9 (Valeurs propres et inversibilité)

Les valeurs propres d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont les réels λ tels que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Remarque. 0 est valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible.

Preuve.

$\square$

Exercice. Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriété 10 (Valeurs propres d'une matrice triangulaire ou diagonale)

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire ou diagonale, alors ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux.

Preuve.

$\square$

Exemple. Les valeurs propres de $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ sont $-2, 0, 5$.

Théorème 11 (Valeurs propres et polynôme annulateur)

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres **possibles** de A sont les racines de P.

Preuve.

$\square$

Attention.

Si P est un polynôme annulateur de A,

$$\lambda \text{ est une racine de } P \not\Longrightarrow \lambda \text{ est une valeur propre de } A.$$

Par exemple, $P(X) = X(X-1)$ est un polynôme annulateur de I_n, 0 est racine de P et n'est pas valeur propre de I_n.

Exercice. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A.

2. Retrouver les valeurs propres de A à l'aide de la question précédente.

Méthode.

On retiendra les différentes méthodes pour déterminer les valeurs propres de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

- ***A partir de la définition des valeurs propres*** *: Lorsqu'un vecteur propre X vous est donné dans l'énoncé, il suffit de calculer le produit AX et d'exprimer le résultat sous la forme λX.*

- ***Si l'on connait un polynôme annulateur** P **de** A : Dans ce cas, il suffit de déterminer les racines de P. Les valeurs propres de A sont parmi ces racines.*

- ***Dans le cas général*** *: Si on ne peut pas appliquer l'une des deux méthodes précédentes, on triangularise la matrice $A - \lambda I_n$ par la méthode du pivot de Gauss pour déterminer pour quelles valeurs de λ elle n'est pas inversible.*

2.2 Sous-espaces propres

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A.
Le **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ, notée $E_\lambda(A)$, est défini par :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R});\ AX = \lambda X\} = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R});\ (A - \lambda I_n)X = 0\}.$$

Toute matrice colonne non nulle appartenant à $E_\lambda(A)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Méthode.

Pour déterminer $E_\lambda(A)$, on doit résoudre l'équation $(A - \lambda I_n)X = 0$ d'inconnue le vecteur colonne X. Si on a déjà triangularisé la matrice $A - \lambda I_n$ en une matrice triangulaire supérieure T_λ, alors l'équation $(A - \lambda I_n)X = 0$ est équivalente à l'équation plus simple $T_\lambda X = 0$. On résout donc directement cette dernière équation.

Exercice. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3 Diagonalisation d'une matrice carrée

Définition.

- On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont **semblables** s'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
$$A = PBP^{-1}.$$
- On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
$$A = PDP^{-1}.$$

Théorème 12 (Diagonalisation d'une matrice)

S'il existe une **base** $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ alors A est **diagonalisable**. Plus exactement :

- Si on prend P une matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de la base $\mathscr{B}$ (en particulier, P est inversible) ;
- Si on prend D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres associées aux vecteurs propres de P ;

Alors :
$$A = PDP^{-1}.$$

Exercice. Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.