Faculté des Sciences Reims

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Chapitre II
Ensembles

Vocabulaire et notations préliminaires :

▷ Un ***ensemble*** est une collection d'objets, appelés ***éléments***, considérés sans ordre, ni répétition.

▷ *"x est élément de l'ensemble E"* se dit aussi "x ***appartient*** à E", ou bien encore *"E contient x"*, et se note "$x \in E$" ou "$E \ni x$" . *(Le symbole "$\in$" vient de la lettre "epsilon", première lettre du verbe être en grec)*. La négation de *"x appartient a E"* se note $x \notin E$, ou bien $E \not\ni x$.

▷ L'ensemble sans élément est dit ***ensemble vide***; on le note : $\emptyset$ ou $\{\}$.

▷ Un ensemble contenant un seul élément est appelé un ***singleton***, un ensemble ayant deux éléments est appelé une ***paire***.

▷ Un ensemble peut être décrit :

- ***En extension***.

  On écrit les éléments de l'ensemble entre des accolades : $E = \{...\}$.

  Exemples 1 :

  1/ $E = \{2, 1, 8, -5, \sqrt{5}\}$

  2/ $E = \{$"3 est pair","Reims est en France","$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$", $\emptyset\}$

- ***En compréhension***.

  On décrit l'ensemble E par l'intermédiaire de la ou des propriétés vérifiées par les éléments de E; cela s'écrit sous la forme : $E = \{x \in F \,|\, P(x)\}$ où F est un ensemble et $P(x)$ une assertion.

  Cela se traduit par : E est l'ensemble des éléments x de F pour lesquels $P(x)$ est vraie. Autrement dit :

$$\forall x,\ \Big[x \in E \Longleftrightarrow \big(x \in F \text{ et } P(x)\big)\Big]$$

  Exemples 2 :

  1/ $E = \{n \in \mathbb{N},\ n \leqslant 40 \text{ et } n \text{ premier}\}$

  2/ $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant 0\}$

  3/ $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{im}(z) = 0\}$

  4/ $X = \Big\{x \in \mathbb{R} \mid (x \geqslant 2) \Rightarrow (x \in [1, 3])\Big\}$

I - Égalité et inclusion

Définition 1 :
Soient E et F deux ensembles.

▷ On dit que E est F sont ***égaux*** et on écrit $E = F$, s'ils ont exactement les mêmes éléments. Autrement dit $E = F$ si :

$$\forall x,\ \left[x \in E \Longleftrightarrow x \in F\right]$$

Deux ensembles E et F qui ne sont pas égaux sont dits ***distincts*** et on écrit $E \neq F$.

▷ On dit que E est une ***partie*** de F (ou E est un ***sous-ensemble*** de F), et on écrit $E \subset F$ (ou bien $F \supset E$), si tout élément de E est élément de F ; on dit également : "E est ***inclus*** dans F". Autrement dit $E \subset F$ si :

$$\forall x, \left[x \in E \Rightarrow x \in F\right]$$

La négation de $E \subset F$ se note $E \not\subset F$.

Notation : Lorsque $E \subset F$ et $E \neq F$, on écrit : $E \subsetneq F$.

Diagrammes de Venn : Ce sont des représentations schématiques d'ensembles. Par exemple, on peut schématiser l'inclusion $E \subset F$ de la façon suivante :

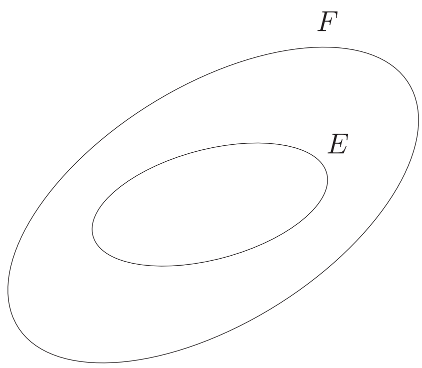

Schéma de $E \subset F$

Remarques :

▷ $E \not\subset F \iff \left(\exists x \in E, x \notin F\right)$

▷ $E = F \iff \left(E \subset F \text{ et } F \subset E\right)$

▷ $E \neq F \iff \left(E \not\subset F \text{ ou } F \not\subset E\right) \iff \Big[(\exists x \in E,\ x \notin F) \text{ ou } (\exists x \in F,\ x \notin E)\Big]$

Notation : L'ensemble de toutes les parties de E est l'ensemble noté $\mathscr{P}(E)$. Autrement dit, on a :

$$\forall X, \left[X \subset E \Longleftrightarrow X \in \mathscr{P}(E)\right]$$

EXEMPLES 3 :

1/ Si $E = \{a, b, c\}$ alors : $\mathscr{P}(E) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\Big\}$

2/ $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Proposition 1 :
Soit E un ensemble. Alors :

1) $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$

2) $E \subset \emptyset \Longleftrightarrow E = \emptyset$

Proposition 2 : *(Transitivité de l'égalité et de l'inclusion)*
Soient E, F et G des ensembles. Alors :

1) $(E \subset F \text{ et } F \subset G) \Longrightarrow E \subset G$

2) $(E = F \text{ et } F = G) \Longrightarrow E = G$

II - Union, Intersection, Différence et Complémentaire

Dans ce paragraphe, E désigne un ensemble.

Définition 2 :
Soient A et B deux parties de E. On appelle :

▷ ***Intersection*** de A et B, l'ensemble noté $A \cap B$ (lu :"intersection de A et B") et défini par :

$$A \cap B = \Big\{x \in E \,\Big|\, x \in A \text{ et } x \in B\Big\}$$

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont ***disjoints***.

▷ ***Réunion*** de A et de B, l'ensemble noté $A \cup B$ (lu : "*réunion de A et B*") et défini par :

$$A \cup B = \Big\{x \in E \,\Big|\, x \in A \text{ ou } x \in B\Big\}$$

▷ ***Différence*** de A avec B, l'ensemble noté $A \setminus B$ (lu : "*A moins B*") et défini par :

$$A \setminus B = \Big\{x \in E \,\Big|\, x \in A \text{ et } x \notin B\Big\}$$

▷ ***Complémentaire*** de A dans E, l'ensemble noté $\complement_E A$ et défini par :

$$\complement_E A = \Big\{x \in E \,\Big|\, x \notin A\Big\}$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble de référence, $\complement_E A$ se note aussi $\overline{A}$ ou bien encore A^c.

Diagrammes de Venn :

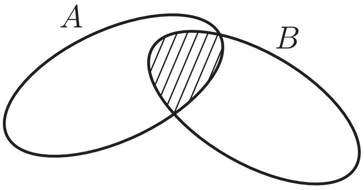

Schéma de $A \cap B$
(Cas où A et B ne sont pas disjoints)

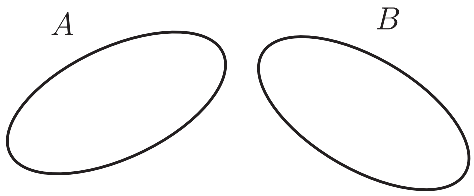

Schéma de $A \cap B$
(Cas où A et B sont disjoints)

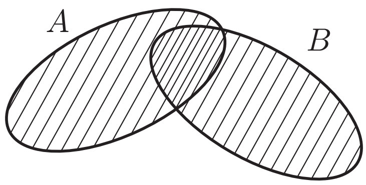

Schéma de $A \cup B$
(Cas où $A \cap B \neq \emptyset$)

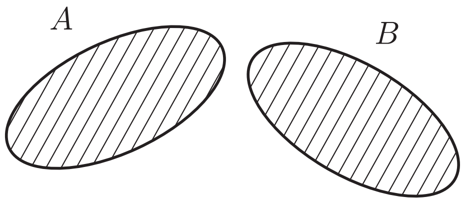

Schéma de $A \cup B$
(Cas où $A \cap B = \emptyset$)

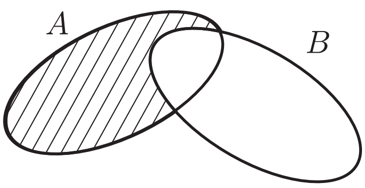

Schéma de $A \setminus B$
(Cas où $A \cap B \neq \emptyset$)

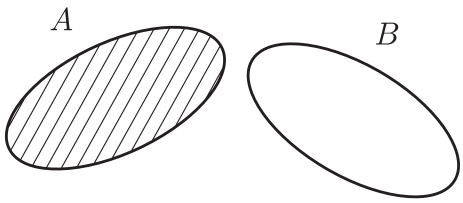

Schéma de $A \setminus B$
(Cas où $A \cap B = \emptyset$)

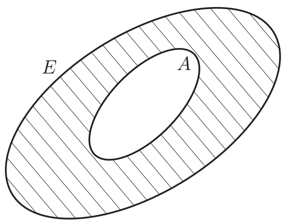

Schéma de $\complement_E A$

Remarque : Ne pas confondre "A et B sont disjoints" et "A et B sont distincts".

Théorème 1 : *(Propriétés fondamentales de l'intersection)*

1) $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, on a :

a) $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $\emptyset \cap A = \emptyset$

b) $A \cap E = A$ et $E \cap A = A$

c) $A \cap A = A$

2) $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)$, on a :

a) $A \cap B = B \cap A$ *(Commutativité de l'intersection)*

b) $(A \cap B) \subset A$ et $(A \cap B) \subset B$

c) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$

3) $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)$, on a :

a) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(Associativité de l'intersection)*

Cet ensemble sera noté plus simplement : $A \cap B \cap C$

b) $\big(A \subset B \text{ et } A \subset C\big) \Longleftrightarrow A \subset (B \cap C)$

Théorème 2 : *(Propriétés fondamentales de la réunion)*

1) $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, on a :

a) $A \cup \emptyset = A$ et $\emptyset \cup A = A$

b) $A \cup E = E$ et $E \cup A = E$

c) $A \cup A = A$

2) $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)$, on a :

a) $A \cup B = B \cup A$ *(Commutativité de la réunion)*

b) $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$

c) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$

3) $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)$, on a :

a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(Associativité de la réunion)*

Cet ensemble sera noté plus simplement : $A \cup B \cup C$

b) $\big(A \subset C \text{ et } B \subset C\big) \Longleftrightarrow (A \cup B) \subset C$

<u>Remarque</u> : L'associativité de la réunion et de l'intersection permettent d'omettre les parenthèses respectivement dans une réunion d'ensembles et une intersection d'ensembles. Par contre, il faudra impérativement mettre des parenthèses lorsque des réunions et intersections se trouvent dans la même expression.

<u>Théorème 3</u> : *(Distributivité)*
$\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)$, on a :

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   (Distributivité de l'intersection par rapport à la réunion)

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   (Distributivité de la réunion par rapport à l'intersection)

<u>Proposition 3</u> : *(Relations entre différence et complémentaire)*
$\forall A, B \in \mathscr{P}(E)$, on a :

1) $\complement_E A = E \setminus A$

2) $A \setminus B = A \cap \complement_E B$

3) $(A \setminus B) \subset A$ et $(A \setminus B) \subset \complement_E B$

<u>Théorème 4</u> : *(Propriétés fondamentales du complémentaire)*

1) $\complement_E E = \emptyset$ et $\complement_E \emptyset = E$

2) $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, on a :

   a) $A \cup (\complement_E A) = E$ et $A \cap (\complement_E A) = \emptyset$

   b) $\complement_E (\complement_E A) = A$

3) $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)$, on a :

   a) $A \subset B \Longleftrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$

   b) $\begin{cases} \complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B) \\ \text{et} \\ \complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B) \end{cases}$ *(Lois de De Morgan)*

III - Produit cartésien

Définition 3 :
Soit un entier $n \geqslant 1$.

1) On appelle ***n*-uplet** (ou encore ***n*-liste**) la donnée dans cet ordre, d'objets x_1, x_2, ..., x_n (pas forcément distincts) ; un tel n-uplet se note : $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$

2) Pour tout entier i compris entre 1 et n, x_i s'appelle la $i^{\text{ième}}$ **composante** du n-uplet $(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)$.

3) L'entier n s'appelle la **longueur** ou encore la **taille** du n-uplet $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$.

Terminologie classique :
Un 2-uplet s'appelle un couple, un 3-uplet s'appelle un triplet, un 4-uplet s'appelle un quadruplet, un 5-uplet s'appelle un quintuplet, etc...

Exemples 4 :
En géométrie analytique plane (resp : dans l'espace), on utilise implicitement des couples (resp : des triplets) de nombres réels pour situer des points du plan (resp : de l'espace) : ce sont les coordonnées des points.

Remarques : Ne pas confondre un n-uplet et un ensemble fini à n éléments. En effet :

a) Pour un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, l'ordre d'écriture des x_i est fondamental. Par contre, pour un ensemble fini à n éléments $\{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$, l'ordre d'écriture des x_i n'a aucune importance.

b) Pour un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, les x_i ne sont pas forcément distincts. Par contre, dans l'écriture de l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$, les x_i sont deux à deux distincts.

Proposition 4 :
Soit deux entiers $n, m \geqslant 1$, $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ un n-uplet et $(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m)$ un m-uplet. Alors :

$$(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m) \Longleftrightarrow \begin{cases} m = n \\ \text{et} \\ \forall i \in \{1, 2 \ldots\ldots, n\}, x_i = y_i \end{cases}$$

Définition 4 :
Soient $n \geqslant 1$ un entier et E_1, E_2,......, E_n des ensembles. On appelle ***produit cartésien*** des ensembles E_1, E_2,......, E_n (pris dans cet ordre), l'ensemble noté $E_1 \times E_2 \times \ldots\ldots \times E_n$ et défini de la manière suivante :

1) Si E_1, E_2, ..., E_n sont tous non vides :

$$E_1 \times E_2 \times \ldots\ldots \times E_n = \Big\{(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \;\Big|\; \forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_i \in E_i\Big\}$$

2) Si l'un (au moins) des ensembles E_1, E_2, ..., E_n est vide :

$$E_1 \times E_2 \times \ldots\ldots \times E_n = \emptyset$$

Cas particulier : Le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \ldots\ldots \times E}_{n \text{ fois}}$ est noté plus simplement E^n.

****