Chapitre 2

Étude de fonction

1 Fonctions d'une variable réelle

1.1 Domaine de définition

Définition.

On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une **fonction** si, à tout élément $x \in \mathbb{R}$, f associe au plus un élément $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.
Si $y = f(x)$, on dira que y est l'**image** de x par f et que x est un **antécédent** de y par f.

Remarque. Une fonction f est donnée la plupart du temps par l'expression de $f(x)$. Par exemple :

$$f : x \mapsto x^2 - 2x - 8 \quad \text{ou simplement} \quad f(x) = x^2 - 2x - 8.$$

Définition.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Le **domaine de définition** de f est l'ensemble

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) \text{ existe } \}.$$

- Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la **courbe représentative** de f, notée $\mathcal{C}_f$, désigne l'ensemble des points $(x, f(x))$ où $x \in \mathcal{D}_f$.

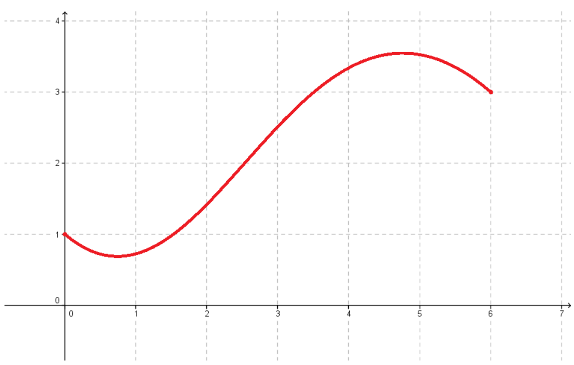
1.2 Continuité

Définition.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est **continue** en un point $a \in I$ si, plus x est proche de a, plus $f(x)$ est proche de $f(a)$. Dans ce cas, on note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est **continue** sur un intervalle I si elle est **continue** en tout point de I.

Interprétation graphique. Une fonction f est **continue** sur un intervalle I si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe représentative se trace d'un "trait continu", sans lever le crayon :



Fonction f continue sur $[0, 6]$

Fonction f discontinue en 2.

Propriété 1 (Continuité des fonctions usuelles)

Les fonctions **polynomiales**, les fonctions **rationnelles**, la fonction **valeur absolue**, la fonction **racine carrée**, les fonctions **logarithme** et **exponentielle** sont **continues** là où elles sont définies.

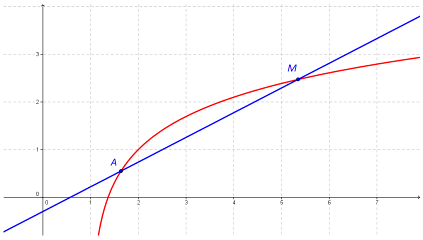
1.3 Dérivabilité

Définition.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On appelle **taux d'accroissement** de f entre x et a le quotient :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Interprétation graphique. Fixons $a \in I$ et considérons $x \in I$, on note $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ un point courant. Le taux d'accroissement désigne alors le coefficient directeur de la corde (AM).

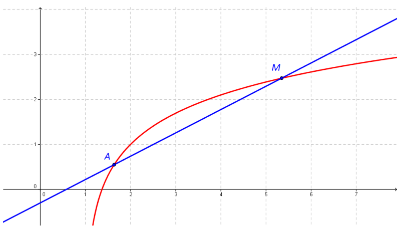


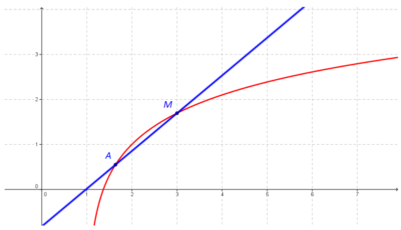
Définition.

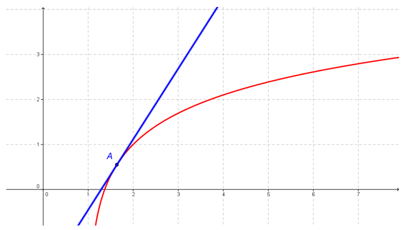
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est **dérivable** en a si, plus x est proche de a, plus le **taux d'accroissement** $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers un nombre réel. Ce nombre est appelé **nombre dérivé de** f **en** a et est noté $f'(a)$. On note alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

Interprétation graphique. f est donc dérivable en a si la corde admet une position limite lorsque le point M tend vers le point A : la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.







Propriété 2 (Équation d'une tangente)

Si une fonction f est dérivable en a, alors l'**équation de la tangente** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point $(a, f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

En particulier, $f'(a)$ est le **coefficient directeur** de la tangente en a à $\mathcal{C}_f$.

Définition.

- Une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I.
- Dans ce cas, la **fonction dérivée** de f, que l'on note f', est la fonction qui à tout nombre réel x de I associe le nombre dérivé de $f'(x)$.

Propriété 3 (Continuité et dérivabilité)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

(1) Soit $a \in I$. Si f est **dérivable** en a, alors f est **continue** en a.

(2) Si f est **dérivable** sur I, alors f est **continue** sur I.

Propriété 4 (Dérivées des fonctions usuelles)

Le tableau ci-dessous rassemble les dérivées des fonctions usuelles à connaître :

On considère f définie par $f(x) = ...$	alors f est dérivable sur $I = ...$	et $\forall x \in I$, $f'(x) = ...$
a constante	$\mathbb{R}$	0
x^n, $n \in \mathbb{N}$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$ $(x \in [0, +\infty[)$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln(x)$ $(x \in]0, +\infty[)$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{1}{x}$

Propriété 5 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soient u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

(1) La **somme** $u + v$ et le **produit** uv sont dérivables sur I et pour tout $x \in I$:

$$(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x) \qquad \text{et} \qquad (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

(2) Si v ne s'annule pas sur I, alors le **quotient** $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.$$

(3) Les **fonctions composées** e^u et u^n $(n \in \mathbb{Z})$ sont dérivables sur I et pour tout $x \in I$:

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)} \qquad \text{et} \qquad (u^n(x))' = nu'(x)u^{n-1}(x).$$

(4) Si u est strictement positive sur I, alors les **fonctions composées** $\ln(u)$ et $\sqrt{u}$ sont dérivables sur I et pour tout $x \in I$:

$$(\ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \qquad \text{et} \qquad (\sqrt{u(x)})'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

1.4 Monotonie

Définition.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est **croissante** sur I si, pour tout $x, y \in I$ tels que $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$.
- La fonction f est **décroissante** sur I si, pour tout $x, y \in I$ tels que $x \leq y$, on a $f(x) \geq f(y)$.
- La fonction f est **monotone** sur I si f est soit croissante, soit décroissante sur I.

Si les inégalités sont strictes, on dira que f est **strictement croissante** (ou **décroissante** ou **monotone**).

La dérivée d'une fonction est un outil très commode pour étudier le sens de variation d'une fonction :

Propriété 6 (Caractérisation de la monotonie par le signe de la dérivée)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

(1) Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **croissante** sur I.

(2) Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **décroissante** sur I.

(3) Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **constante** sur I.

1.5 Convexité

Définition.

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est dérivable sur I et si f' est elle-même dérivable sur I, on appelle la dérivée de f' la **dérivée seconde** de f et on la note f''.
- Plus généralement, on peut définir la **dérivée n-ième** de f, notée $f^{(n)}$, par récurrence :

  0) $f^{(0)} = f : I \to \mathbb{R}$.

  1) Si f est dérivable sur I, on note $f^{(1)} = f' : I \to \mathbb{R}$.

  $\vdots$

  n) Si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})' : I \to \mathbb{R}$.
- On dira alors que f est n **fois dérivable** sur I si elle est $n-1$ **fois dérivable sur** I et si $f^{(n-1)}$ est **dérivable** sur I.
- On dit que f est de **classe** C^n **sur** I ou est n **fois continûment dérivable sur** I si f est n **fois dérivable** sur I et si $f^{(n)}$ est **continue** sur I.

Définition.

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I. Alors :

- On dit que f est **convexe** sur I si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est **au dessus** de chacune de ses tangentes.
- On dit que f est **concave** sur I si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de chacune de ses tangentes.
- On dit que f admet un **point d'inflexion** en $a \in I$ si f opère un changement de convexité en a (c'est-à-dire passe de convexe à concave ou de concave à convexe). Dans ce cas, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en ce point traverse $\mathcal{C}_f$.

Théorème 7 (Caractérisation de la convexité)

(1) Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I. Alors :

(a) f est **convexe** sur I si et seulement si f' est **croissante** sur I.

(b) f est **concave** sur I si et seulement si f' est **décroissante** sur I.

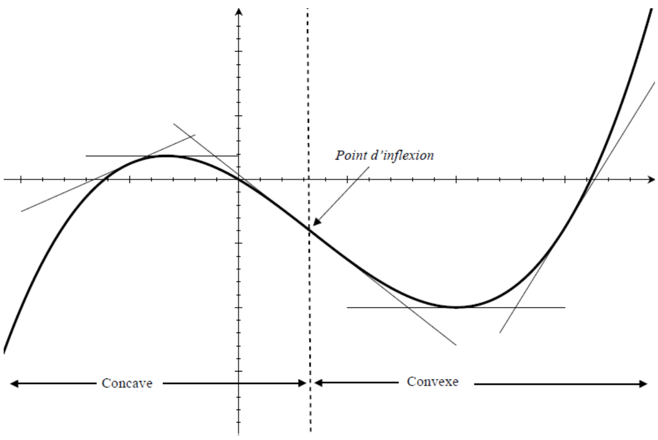
(2) Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I. Alors :

(a) f est **convexe** sur I si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

(b) f est **concave** sur I si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

(c) f admet un **point d'inflexion** en $a \in I$ si et seulement si f'' **s'annule et change de signe** en a.

Représentation graphique.



1.6 Plan d'étude d'une fonction

Méthode.

Terminons en résumant les différentes étapes pour l'étude d'une fonction f :

- Déterminer le domaine de définition de f.
- Justifier que f est continue et dérivable sur l'intervalle d'étude.
- Calculer et factoriser la fonction dérivée f' puis déterminer son signe.
- En déduire les variations de f.
- Étudier (si cela est demandé) la convexité de f.
- Tracer de la courbe représentative de f.

2 Fonctions de deux variables

2.1 Définitions

Définition.

On dit que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une **fonction de deux variables réelles** si, à tout élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, f associe au plus un élément $z \in \mathbb{R}$ tel que $z = f(x, y)$.

Exemple. Les fonctions f, g et h définies pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad g(x, y) = x^2, \qquad h(x, y) = x^2 + xe^{-y}$$

sont des fonctions de 2 variables.

2.2 Représentation graphique

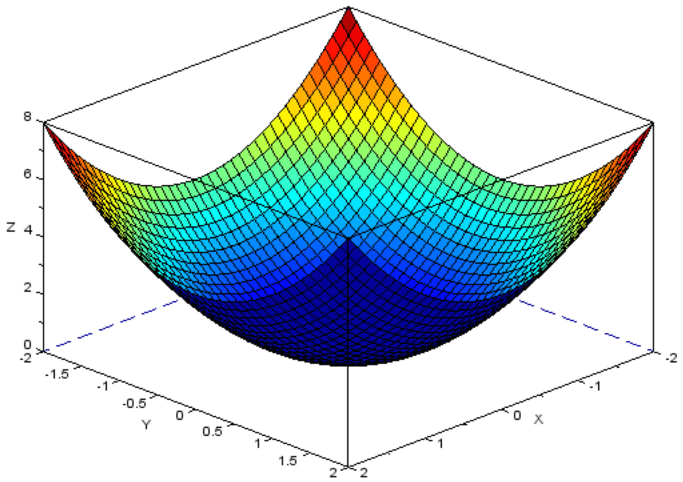
Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables, il existe une représentation graphique en 3 dimensions de f. Pour cela, on place tous les points de coordonnées

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

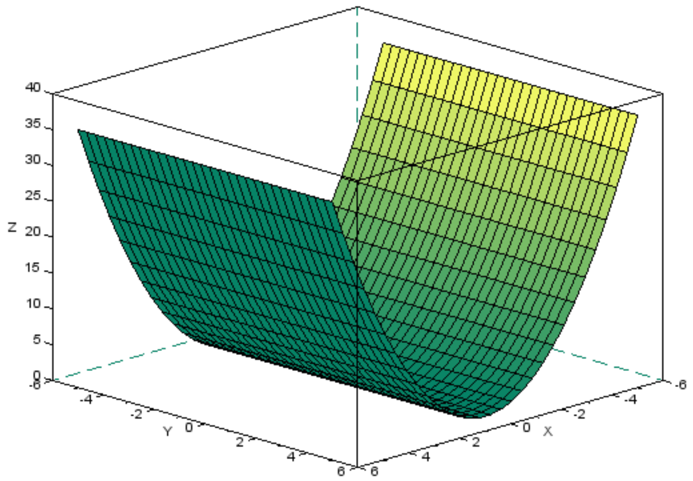
dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé. On obtient alors une surface qu'on représentera dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Exemple.

- Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$. La représentation graphique de f est :



- Soit $g(x,y) = x^2$. La représentation graphique de g est :



2.3 Dérivées partielles

Définition.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

- On appelle **dérivée partielle par rapport à la première coordonnée** la fonction, notée $\partial_1(f)$ obtenue en dérivant f par rapport à la variable x, la variable y étant considérée comme une constante.
- On appelle **dérivée partielle par rapport à la deuxième coordonnée** la fonction, notée $\partial_2(f)$ obtenue en dérivant f par rapport à la variable y, la variable x étant considérée comme une constante.

Exemple. Pour la fonction $h(x,y) = x^2 + xe^{-y}$, on a $\partial_1(h)(x,y)$ et $\partial_2(h)(x,y)$:

$$\partial_1(h)(x,y) = 2x + e^{-y} \qquad \text{et} \qquad \partial_2(h)(x,y) = -xe^{-y}.$$

3 Rendement d'échelle, dérivée logarithmique, élasticités

3.1 Les différents coûts

Définition.

On considère une production dans laquelle x unités sont produites.

- On note $x \to C(x)$ la fonction **coût total** qui au nombre x d'unités produites associe le coût total de production.
- Le **coût moyen** représente le coût moyen par unité produite, donc il s'agit de la fonction :
$$\boxed{C_M : x \to \frac{C(x)}{x}}$$
- Le **coût marginal** est le coût de la dernière unité produite, donc il s'agit de la fonction :
$$\boxed{C_m : x \to C(x) - C(x-1)} \text{ pour } x \geq 1$$
- Pour une variable x, on notera Δx pour désigner une différence entre deux valeurs distinctes prises par la variable x.
On a alors $C_m(x) = C(x) - C(x-1) = \dfrac{C(x) - C(x-1)}{x - (x-1)} = \dfrac{\Delta C(x)}{\Delta x}$.
Si x est grand (c'est-à-dire, bien plus grand que 1), alors on considèrera que Δx est très faible, et donc que :
$$\boxed{C_m(x) \simeq C'(x)}$$

Propriété 8

La courbe représentative de la fonction C_m coupe celle de la fonction C_M en son minimum.

3.2 Dérivée logarithmique et élasticités

Définition.

- On appelle **dérivée logarithmique** d'une fonction f strictement positive, la fonction :
$$\boxed{\mathcal{L}(f) = (\ln(f))' = \frac{f'}{f}}$$
- On appelle **élasticité de y par rapport à x**, notée $e_{y/x}$, le rapport entre le taux d'évolution en % de y et le taux d'évolution en % de x. On a alors :
$$\boxed{e_{y/x} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}}$$

Remarque. Si $\dfrac{\Delta x}{x} = 1\%$ alors $e_{y/x} = \dfrac{\Delta y}{y}$.
Ainsi, $e_{y/x}$ représente la variation relative en % de y provoquée par une augmentation de 1% de x.

Lien avec la dérivée logarithmique. Si y est fonction de x, c'est à dire si $y = f(x)$, on a alors :
$$e_{y/x} = \frac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \times \frac{x}{f(x)}.$$

Et quand $\Delta x \to 0$ alors $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \to f'(x)$ et donc :

$$\boxed{e_{y/x} = x\frac{f'(x)}{f(x)} = x\mathcal{L}(x)}$$

3.3 Cas des fonctions de deux variables

Définition.

On considère à présent une variable Y qui dépend de deux variables K et L., c'est à dire $Y = f(K, L)$.

- L'**élasticité de Y par rapport à K** est définie par :

$$\boxed{e_{Y/K} = \frac{K}{f(K,L)}\frac{\partial f}{\partial K}(K,L)}$$

- L'**élasticité de Y par rapport à L** est définie par :

$$\boxed{e_{Y/L} = \frac{L}{f(K,L)}\frac{\partial f}{\partial L}(K,L)}$$

3.4 Rendement d'échelle

Définition.

On s'intéresse ici au niveau de production $Y = f(K, L)$ exprimé en fonction de la quantité de travail L et du capital K utilisés pour cette production.
On dit que f est **homogène de degré** h si pour tout réel $a > 0$ on a :

$$\boxed{f(aK, aL) = a^h f(K, L)}$$

Remarque. a désigne le facteur d'échelle. Si $a > 1$, cela signifie qu'on augmente les paramètres de production, si $a < 1$ on les diminue.

- Si $h = 1$ alors $f(aK, aL) = af(K, L)$ on dit que f admet des rendements d'échelle constants, c'est à dire que la production augmente dans la même proportion que les paramètres de production.
- Si $h > 1$ alors $f(aK, aL) > af(K, L)$ quand $a > 1$, on dit que f admet des rendements d'échelle croissants, c'est à dire que la production augmente dans une proportion supérieure à celle des paramètres de production. Cela entraîne donc une diminution du coût unitaire, ce qui accroît la production à moyens constants. On réalise une économie d'échelle.
- Si $h < 1$ alors $f(aK, aL) < af(K, L)$ quand $a > 1$, on dit que f admet des rendements d'échelle décroissants, c'est à dire que la production augmente dans une moindre proportion que celle des paramètres de production. Cela entraîne une augmentation du coût marginal, chaque unité supplémentaire produite coûte plus cher que la précédente.

3.5 Cas particulier : fonctions de Cobb-Douglas

Définition.

Les fonctions de Cobb-Douglas sont très souvent utilisées pour modéliser les fonctions de production. Elles sont de la forme :

$$\boxed{Y = f(K, L) = cK^\alpha L^\beta}$$

Remarques. On pourra vérifier en exercice les affirmations suivantes :

1. f est homogène de degré $\alpha + \beta$.
2. $\alpha = e_{Y/K}$ et $\beta = e_{Y/L}$.

4 Exercices

Exercice 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 3 \qquad f_2(x) = \frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x^3} \qquad f_3(x) = \frac{3}{x^2+4x+4}$$
$$f_4(x) = e^{x^2-3x} \qquad f_5(x) = x\ln(x) - x \qquad f_6(x) = e^{3x^2-1}$$
$$f_7(x) = \ln\left(x^2-1\right) \qquad f_8(x) = \sqrt{2x-1} \qquad f_9(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$$
$$f_{10}(x) = \frac{1}{\ln(x)} \qquad f_{11}(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} \qquad f_{12}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{3-x}\right)$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-2x+4)e^x$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 4$.
3. On se propose d'étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T. Pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (2x+4)$.
   (a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$. Étudier le sens de variation de g' sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Indiquer le sens de variation de g. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.
   (a) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et en déduire le signe de $g(x)$.
   (b) Justifier que, pour tout réel x, $(e^x - x)$ est strictement positif.
2. (a) Étudier le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variation.
   (b) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   (c) A l'aide de la question 1., étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite T.
   (d) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite T (on admettra que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$).

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \exp\left(-x^2\right)$.

1. Déterminer f' et dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer f'' et étudier la convexité de f.
3. Déterminer les équations des tangentes en chacun des points d'inflexions de f.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \ln(1+x^2)$.

1. Calculer f' puis f''.
2. Étudier la convexité de f.
3. Montrer que f admet deux points d'inflexions dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 6

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = 3x + 2y - 1 \qquad f_2(x,y) = x^2 + y^2 + xy \qquad f_3(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$$
$$f_4(x,y) = \ln(x)e^y + x^3y^2 \qquad f_5(x,y) = x^2 - 2xy + ye^{-x} \qquad f_6(x,y) = xy\ln(x+y)$$
$$f_7(x,y) = e^{x+y} + \ln(xy) \qquad f_8(x,y) = xy(2-x-y) \qquad f_9(x,y) = xe^{x(y^2+1)}$$

Exercice 7

Le tableau ci-dessous représente l'évolution du taux d'endettement des ménages, en pourcentage du revenu disponible brut, en France de 2001 à 2010.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux d'endettement y_i	52,2	53,2	55,6	58,6	63,4	67,4	70,9	73,5	75,7	78,9

Source : INSEE

Une estimation de l'évolution du taux d'endettement des ménages est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;11]$ par : $f(x) = -0{,}04\,x^3 + 0{,}68\,x^2 - 0{,}06\,x + 51{,}4$ où x est le nombre d'années écoulées depuis 2000.
Ainsi, le taux d'endettement des ménages en % à la fin du premier semestre 2003 est estimé par $f(2{,}5)$.

1. (a) Calculer la valeur estimée du taux d'endettement des ménages en 2009.
   (b) Calculer le pourcentage d'erreur par rapport au taux réel d'endettement des ménages en 2009.
2. (a) Calculer $f'(x)$ dresser le tableau de variations de f.
   (b) Calculer $f''(x)$ et déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
   (c) Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion et déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.
   (d) En déduire la position relative de cette tangente avec $\mathcal{C}$.
3. Le rythme de croissance instantané du taux d'endettement est assimilé à la dérivée de la fonction f.
   Au cours de quelle année, le rythme de croissance du taux d'endettement a-t-il commencé à diminuer ?

Exercice 8

Le coût total de production d'un bien est donné par :

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 72q \text{ pour } q \in [0;8]$$

1. Exprimer le coût marginal $C'(q)$ en fonction de q.
2. Montrer que la fonction de coût total est strictement croissante sur $[0;8]$.
3. Exprimer le coût moyen en fonction de q.
4. Étudier les variations du coût moyen sur $[0;8]$.
5. Dans le même repère orthogonal bien choisi, tracer la courbe représentant le coût marginal et la courbe représentant le coût moyen (on fera apparaître les solutions de l'équation précédente ainsi que les tangentes horizontales).
6. D'après le graphique, pour quelles quantités le coût marginal est-il supérieur au coût moyen ?
7. Retrouver par un calcul le résultat précédent.

Exercice 9

En économie, on appelle coûts fixes les coûts indépendants des quantités produites dont l'entreprise doit s'acquitter pour son bon fonctionnement.
On appelle coût marginal le coût supplémentaire induit par la dernière unité produite et on admet que le coût marginal est sensiblement égal à la dérivée du coût total.
Une entreprise fabrique des objets et estime le coût total, en euros, de la production de x objets par :

$$C_T(x) = x^3 - 60x^2 + 1500x + 5000 \text{ pour } x \in [0, 70].$$

Partie A : Étude du coût total

1. Déterminer le montant des coûts fixes.
2. Déterminer l'expression du coût marginal $C_m(x)$ en fonction de x.
3. Déterminer les variations du coût total sur $[0, 70]$.

Partie B : Étude du coût marginal

1. Calculer la dérivée de la fonction C_m et en déduire le sens de variation de C_m sur $[0, 70]$.
2. Justifier l'existence d'un point d'inflexion pour la courbe représentative de C_T.
3. A partir de quelle quantité produite, chaque objet supplémentaire produit est-il plus coûteux que l'objet précédent ?
4. On appelle rendement marginal le rendement prévu pour la production d'un objet supplémentaire.

   Justifier l'affirmation suivante: "pour une production de plus de 20 objets les rendements marginaux dans cette entreprise sont décroissants".

Partie C : Étude du coût moyen

Le coût moyen d'un objet lorsque x objets sont produits est donné par $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$ pour $x > 0$.

1. Quel est le coût moyen pour 20 objets produits ?
2. Montrer que $C'_M(x) = \dfrac{2x^3 - 60x^2 - 5000}{x^2}$.
3. On pose $f(x) = 2x^3 - 60x^2 - 5000$.
   (a) Étudier les variations de f sur $[0, 70]$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[20, 70]$ et en donner une valeur approchée à l'unité près.
   (c) En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
4. Donner en utilisant la question précédente les variations de C_M.
5. Donner une valeur approchée à l'unité près de la valeur x pour laquelle $C_M(x)$ est minimal.
6. Résoudre l'équation $C_m(x) = C_M(x)$.

Exercice 10

On cherche à déterminer la quantité de bien q qu'une firme doit produire afin de maximiser son profit.

1. **Le profit d'une firme dans un marché concurrentiel.**

   Dans une situation concurrentielle, la firme doit s'aligner sur un prix de marché p. Supposons alors que la fonction coût de production soit définie par :

   $$C(q) = q^2 - 20q + 200$$

   (a) Montrer que le bénéfice est donné par $B(q) = -q^2 + (20 + p)q - 200$.
   (b) En déduire la quantité à produire pour réaliser un profit maximal.

2. **Le profit d'une firme dans une situation de monopole**

   Dans une situation de monopole, l'entreprise peut fixer son prix p mais la demande D est une fonction décroissante du prix p. Supposons que la demande soit définie par $D(p) = 80 - 2p$.

   (a) Montrer que le profit est donné par $B(q) = -q^2 + 20q + 80p - 2p^2 - 200$.
   (b) En déduire la quantité à produire pour réaliser un profit maximal. Déterminer alors le prix.

Exercice 11

On considère un bien et on note D la fonction de demande du marché et O la fonction d'offre du marché définies par :

$$D(p) = -2p + 40 \text{ et } O(p) = 5p - 10$$

où p est le prix exprimé en euros, les quantités $D(p)$ et $O(p)$ sont exprimés en milliers.

Déterminer le prix d'équilibre p^* et la quantité d'équilibre q^* ainsi que les élasticités de la demande et de l'offre au prix d'équilibre.

Exercice 12

La quantité demandée Q d'un bien est une fonction du prix p et du revenu r définie par : $Q(p,r) = \dfrac{10r^{\frac{2}{3}}}{p\sqrt{p}}$.

1. Déterminer l'élasticité de la demande Q par rapport au prix.
2. Déterminer l'élasticité de la demande Q par rapport au revenu.

Exercice 13

Pour les fonctions de productions suivantes, déterminer si leurs rendements d'échelle sont constants, croissants ou décroissants :

1. $Q(K,L) = 2K - 3L$.
2. $Q(K,L) = K^2 - L^2$.
3. $Q(K,L) = \dfrac{Q}{\sqrt{Q+L}}$.
4. $Q(K,L) = \sqrt{K^2 + 3KL + L^2}$.

Exercice 14

On considère la fonction de production de type Cobb-Douglas définie par : $Q(K,L) = K^{0,8}L^{0,3}$ avec K et L strictement positifs.

1. Montrer que le rendement d'échelle est croissant.
2. Déterminer l'élasticité de Q par rapport à K et L.

Exercice 15 (Extrait de l'interrogation 1 (2017-18))

Pour chacune des questions suivantes, déterminer la réponse correcte parmi les trois proposées.

1. On considère la fonction $f(x) = \sqrt{\ln(2x)}$. Sa dérivée $f'(x)$ est égale à :

   (a) $\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(2x)}}$ (b) $\dfrac{\ln(2x)}{\sqrt{\ln(2x)}}$ (c) $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(2x)}}$

2. On considère la fonction $g(x) = \dfrac{x}{e^x + 1}$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative. L'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}_g$ est :

   (a) $y = 2x - 1$ (b) $y = 2x$ (c) $y = \dfrac{1}{2}x$

3. On considère la fonction $h(x,y) = 2xe^y - y^3 + \dfrac{x}{y}$. Sa dérivée partielle $\partial_2 h(x,y)$ est égale à :

   (a) $2e^y + \dfrac{1}{y}$ (b) $2xe^y - 3y^2 - \dfrac{x}{y^2}$ (c) $2e^y - 3y^2 + \dfrac{x}{y^2}$

4. Les rendements d'échelle de la fonction de production $F(K, L) = K^{1/3}L^{1/2}$ sont-ils ?

   (a) croissants (b) décroissants (c) constants

Exercice 16 (Extrait de l'interrogation 1 (2017-18))

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^3 - 7,5x^2 + 20x + 8$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Étudier la convexité de la fonction f et montrer que la courbe admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
3. La fonction f modélise sur l'intervalle $]0; 6.5]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués par une entreprise.

   Le prix de vente d'un article est fixé à $13,25$ euros. On suppose que toute la production est vendue.

   On considère la fonction B définie sur l'intervalle $]0; 6,5]$ par $B(x) = 13,25x - f(x)$.

   (a) Étudier les variations de la fonction B.

   (b) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal?
4. Vérifier que si le bénéfice est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.
5. Le coût moyen de production C_M mesure le coût en euro par article produit.

   On admet que $(C_M)'(x) = \dfrac{(x-4)(2x^2 + 0,5x + 2)}{x^2}$.

   (a) Étudier les variations de la fonction C_M.

   (b) En déduire le prix de vente minimal, arrondi à l'euro près, d'un article pour que l'entreprise ne travaille pas à perte.

   (c) Vérifier que lorsque le coût moyen est minimal, alors le coût moyen est égal au coût marginal.