Chapitre III

Applications - Injections - Surjections - Bijections

I - Définitions et exemples

Définition 1 :

1/ Une application f est la donnée de deux ensembles E et F non vides et d'une façon d'associer à chaque élément $x \in E$ un unique élément $y \in F$, noté $f(x)$.

On dit alors que f est une ***application de E vers F*** et on la note :

$$\begin{array}{rcl} f\ : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \qquad \text{ou bien} \qquad f : E \longrightarrow F,\ x \longmapsto f(x)$$

On peut également la noter plus simplement : $f : E \longrightarrow F$ ou bien encore $E \xrightarrow{f} F$

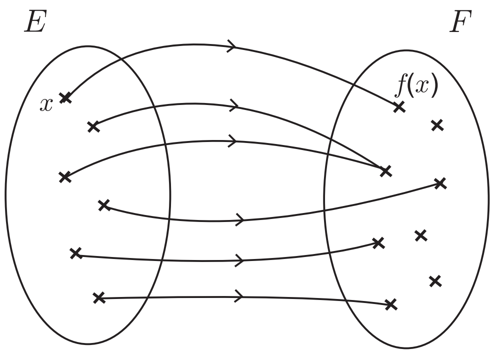
2/ E s'appelle l'***ensemble de départ de f***, F l'***ensemble d'arrivée de f***.

3/ Pour tout $x \in E$, $f(x)$ s'appelle l'***image de x par f***.

4/ Pour $y \in F$, on appelle ***antécédent de y par f***, tout élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

5/ On appelle ***image de f*** (noté $\mathrm{Im} f$) l'ensemble défini par : $\mathrm{Im} f = \{f(x) \mid x \in E\}$

Représentation sagittale :



Remarques :

1/ $\mathrm{Im} f \subset F$ et $\mathrm{Im} f \neq \emptyset$

2/ On a : $\forall y \in F,\ \Big[y \in \mathrm{Im} f \iff \big(\exists x \in E,\ f(x) = y\big)\Big]$

EXEMPLES 1 :

1/ Soit E un ensemble non vide et A une partie de E. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi \ : \mathscr{P}(E) &\longrightarrow \mathscr{P}(E) \\ X &\longmapsto X \cap A \end{aligned}$$

est une application. On a $\text{Im}\varphi = \mathscr{P}(A)$

2/ $\begin{aligned} \sin \ : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin x \end{aligned}$ est une application et $\text{Im}(\sin) = [-1, 1]$.

3/ Si on désigne par $\mathcal{P}$ un plan et par $\mathcal{C}$ l'ensemble des cercles de ce plan, on peut définir l'application notée par exemple g, de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{P}$, qui à chaque cercle associe le centre de ce cercle. On a :

$$\begin{aligned} g \ : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ x &\longmapsto g(x) = \text{Centre du cercle } x \end{aligned}$$

On a $\text{Im}(g) = \mathcal{P}$

4/ $\begin{aligned} h \ : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto h(x) = \ln x \end{aligned}$ n'est pas une application.

5/ $\begin{aligned} k \ : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto k(x) = y \text{ où } y \in \mathbb{R} \text{ et } y^2 = x \end{aligned}$ n'est pas non plus une application.

NOTATION : Si E et F sont deux ensembles non vides, l'ensemble de toutes les applications de E vers F se note : F^E. Autrement dit :

$$f \in F^E \iff \Big[f \text{ est une application de } E \text{ vers } F \Big]$$

EXEMPLE 2 : Si $\begin{aligned} f \ : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto f(x) = x^4 \end{aligned}$, on écrira : $f \in (\mathbb{R}^+)^{[0,1]}$.

Définition 2 :

Soient $f_1 : E_1 \longrightarrow F_1$ et $f_2 : E_2 \longrightarrow F_2$ des applications. On dit que f_1 et f_2 sont ***égales*** et on écrit $f_1 = f_2$ si :

$$\Big[E_1 = E_2 \Big] \text{ et } \Big[F_1 = F_2 \Big] \text{ et } \Big[\forall x \in E_1,\ f_1(x) = f_2(x) \Big]$$

REMARQUE : On a $f_1 \neq f_2$ si $E_1 \neq E_2$ ou bien si $F_1 \neq F_2$ ou bien si $E_1 = E_2$ et $F_1 = F_2$ et $\exists x \in E_1$ tel que $f_1(x) \neq f_2(x)$.

Exemples 3 :

1/ Les applications f et g suivantes sont distinctes :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto f(x) = x^2 \qquad\qquad x \longmapsto g(x) = x^2$$

2/ Même résultat pour les deux applications suivantes :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \sin x \qquad\qquad x \longmapsto g(x) = \sin x$$

3/ Les applications f et g suivantes sont égales :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \sqrt{x^2} \qquad\qquad x \longmapsto g(x) = |x|$$

II - Composition d'applications

Définition 3 :
Soient deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F' \longrightarrow G$ telles que $F \subset F'$. On appelle ***application composée de f par g***, que l'on note $g \circ f$, l'application définie par :

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Remarque :

1/ Cette définition est justifiée par le fait que : $\forall x \in E,\ f(x) \in F'$ (car $f(x) \in F$ et $F \subset F'$) et donc $g(f(x))$ a un sens.

2/ On retient la définition de $g \circ f$ grâce au schéma suivant :
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & f(x) \arrow[r, "g"] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

3/ En général $g \circ f \neq f \circ g$

Théorème 1 : *(Associativité de la composition des applications)*
Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F' \longrightarrow G$ et $h : G' \longrightarrow H$ des applications. On suppose que $F \subset F'$ et $G \subset G'$. Alors : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Cette application est alors simplement notée $h \circ g \circ f$ et on a :

$$\begin{aligned} h \circ g \circ f : E &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto (h \circ g \circ f)(x) = h\big(g(f(x))\big) \end{aligned}$$

Notation : Si f est une application de E vers E et si $n \in \mathbb{N}^*$, on note f^n l'application $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \cdots \circ f}_{\text{n fois}}$ et par convention, on pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$.

III - Injections - Surjections - Bijections

Définition 4 :

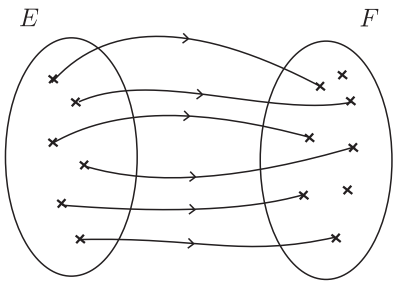
Soit une application $f : E \longrightarrow F$.

1/ On dit que f est ***injective*** (ou que : f est une ***injection***), si tout élément de F admet au plus un antécédent par f.

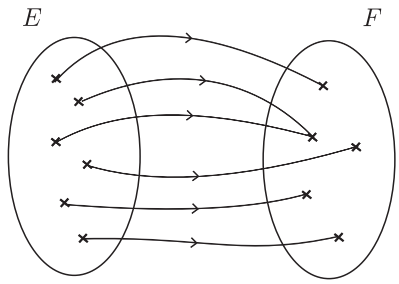
2/ On dit que f est ***surjective*** (ou que : f est une ***surjection***), si tout élément de F admet au moins un antécédent par f.

3/ On dit que f est ***bijective*** (ou que : f est une ***bijection***), si tout élément de F admet un et un seul antécédent par f.

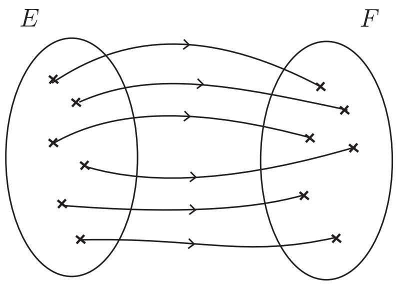
Illustrations :



Cas où f est injective



Cas où f est surjective



Cas où f est bijective

EXEMPLES 4 :

1/ L'application $\left| \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \right.$ est injective, mais n'est ni surjective, ni bijective.

2/ L'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \right.$ est surjective, mais n'est ni injective, ni bijective.

3/ L'application $\left| \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \right.$ est injective, surjective et bijective.

Théorème 2 :
Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est injective.

ii) $\forall (x,x') \in E^2,\ \left[f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\right]$

iii) $\forall (x,x') \in E^2,\ \left[x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')\right]$

Corollaire 1 :
Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Alors :

$$\left[f \text{ n'est pas injective}\right] \iff \left[\exists (x,x') \in E^2,\ x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x')\right]$$

Théorème 3 :
Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est surjective.

ii) $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$

iii) $\mathrm{Im} f = F$

Corollaire 2 :
Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Alors :

$$\left[f \text{ n'est pas surjective}\right] \iff \left[\exists y \in F,\ \forall x \in E, f(x) \neq y\right] \iff \left[\mathrm{Im} f \neq F\right]$$

Théorème 4 :
Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) f est bijective.

ii) $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$

iii) f est surjective et f est injective.

Corollaire 3 :
Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Alors :

$$\left[f \text{ n'est pas bijective}\right] \iff \left[f \text{ n'est pas surjective ou } f \text{ n'est pas injective}\right]$$

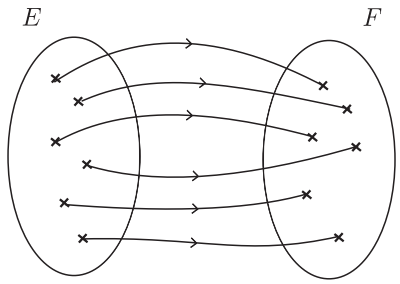
Définition 5 :
Si $f : E \longrightarrow F$ est une application bijective, on peut définir l'application notée f^{-1}, appelée ***application réciproque de f*** et définie de F dans E par :

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{array}$$

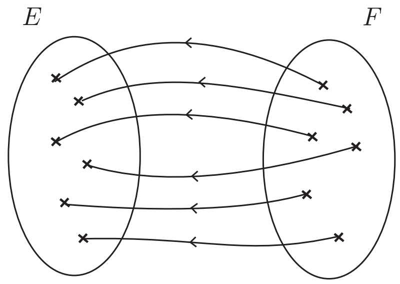
Autrement dit :

$$\forall y \in F, \forall x \in E, \ \left[f^{-1}(y) = x \iff y = f(x) \right]$$

Illustrations :



Représentation de f



Représentation de f^{-1}

EXEMPLES 5 :

1/ Si E est un ensemble non vide, l'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ A & \longmapsto & \complement_E A \end{array} \right.$ est bijective. Elle est égale à son application réciproque.

2/ L'application $\begin{array}{rcl} \ln : \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$ est bijective et sa réciproque est l'application $\begin{array}{rcl} \exp : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{*+} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$

3/ L'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$ est bijective et sa réciproque est l'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[3]{x} \end{array} \right.$

Proposition 1 :
Soit une application $f : E \longrightarrow F$ bijective. Alors :

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$$

Autrement dit : $\forall x \in E, \ f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ et $\forall y \in F, \ f\big(f^{-1}(y)\big) = y$

Proposition 2 : *(Caractérisation fonctionnelle de la bijectivité)*
Soit une application $f : E \longrightarrow F$. S'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

EXEMPLE 6 : Considérons l'application f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^{*-} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{*+} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2} \end{array}$$

Définissons alors l'application g par :

$$\begin{array}{rcl} g\ :\mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{*-} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{array}$$

On a alors : $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{*-}}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{*+}}$. Par conséquent, l'application f est bijective et f^{-1} et donnée par : $\begin{array}{rcl} f^{-1}\ :\mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{*-} \\ x & \longmapsto & -\frac{1}{\sqrt{x}} \end{array}$

Corollaire 4 :

Si $f : E \longrightarrow F$ est bijective, alors f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$

Corollaire 5 :

Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

****