Chapitre 3

Optimisation

1 Extrema

1.1 Cas des fonctions d'une variable réelle

Dans cette section, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable réelle.

Définition.

Soit x_0 un point de $\mathcal{D}_f$.

- f admet un **maximum local** en x_0 s'il existe un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ contenant x_0 tel que :

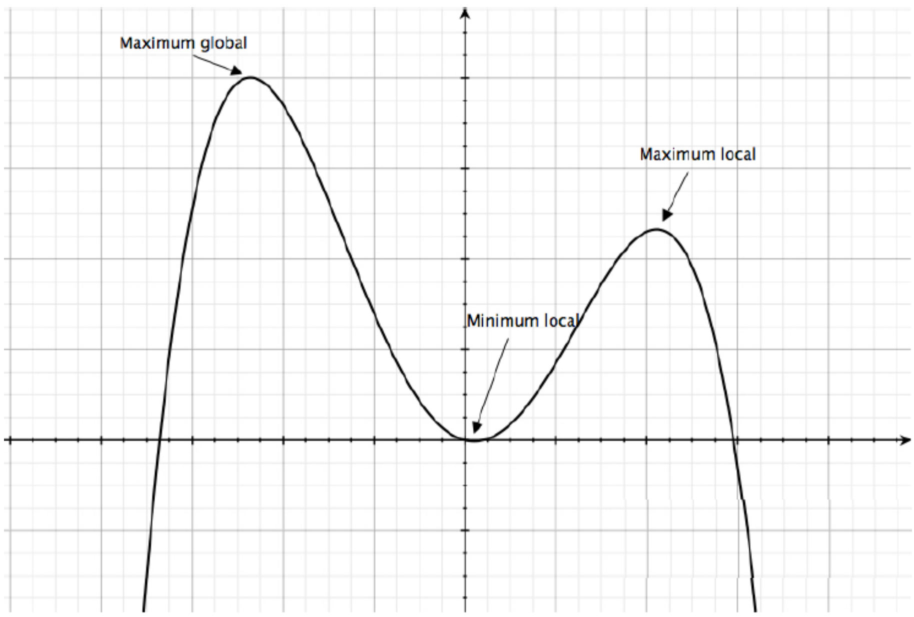
$$\forall x \in I, \; f(x) \leq f(x_0).$$

- f admet un **maximum global** en x_0, si :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \; f(x) \leq f(x_0).$$

On peut de définir de la même façon la notion de **minimum local** et de **minimum global** en x_0.

Représentation graphique.



Nous donnons une condition nécessaire sur la dérivée d'une fonction pour avoir l'existence d'un extremum local (maximum local ou minimum local) sur un intervalle ouvert:

Propriété 1 (Condition nécessaire d'extremum)

Supposons que f est dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

Si f possède un **extremum local** en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Attention.

La réciproque de cette propriété est fausse. La nullité de $f'(x_0)$ n'implique pas l'existence d'un extremum local en x_0.
Par exemple, la fonction $f(x) = x^3$ n'admet pas d'extremum local en 0 (elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$) et pourtant sa dérivée s'annule en 0 ($f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$).

Le théorème suivant fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction admette un extremum local :

Théorème 2 (Condition nécessaire et suffisante d'extremum)

Supposons que f est dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

$$f \text{ possède un } \textbf{extremum local} \text{ en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_0) = 0 \text{ et } f' \textbf{ change de signe} \text{ en } x_0$$

Remarque. Si f' passe d'une valeur négative à une valeur positive, l'extremum local est un minimum. Si f' passe d'une valeur positive à une valeur négative, l'extremum local est un maximum.

1.2 Cas des fonctions de deux variables réelles

Dans cette section, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables réelles.

Définition.

Soit (x_0, y_0) un point de $\mathcal{D}_f$.

- f admet un **maximum local** en (x_0, y_0) s'il existe une partie de $A \subset \mathcal{D}_f$ contenant (x_0, y_0) tel que :

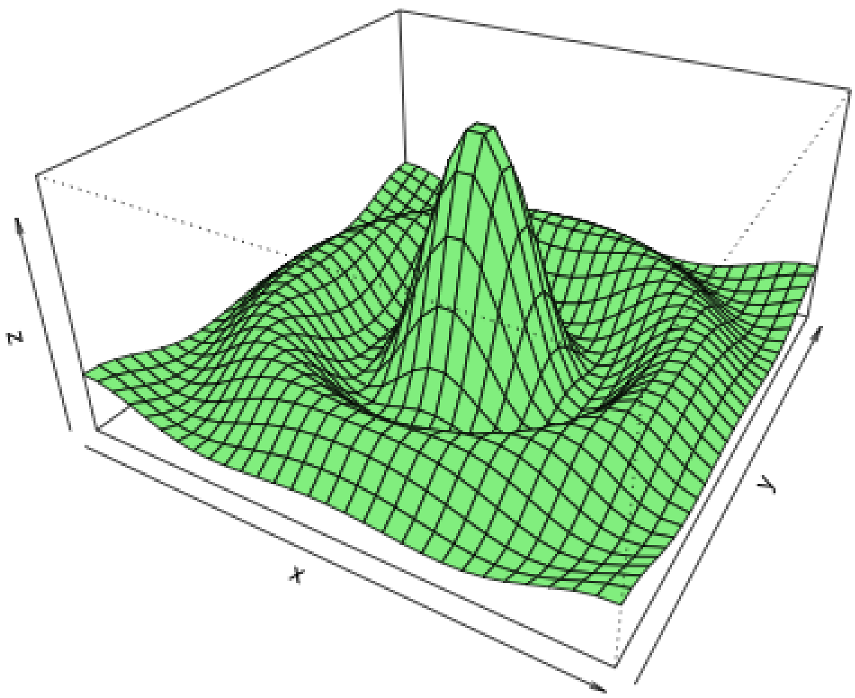
$$\forall (x, y) \in A, \ f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

- f admet un **maximum global** en (x_0, y_0) si :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f, \ f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

On peut de définir de la même façon la notion de **minimum local** et de **minimum global** en (x_0, y_0).

Représentation graphique.



Définition.

On appelle **point critique de** f tout point (x_0, y_0) vérifiant le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_1(f)(x_0,y_0) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x_0,y_0) & = & 0 \end{array}\right.$$

Théorème 3 (Condition nécessaire d'extremum)

Si f admet un **extremum local** en (x_0, y_0) alors (x_0, y_0) est un **point critique** de f.

Exemple. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$$

On cherche à étudier les extremums de f. On commence par déterminer ses points critiques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_1(f)(x_0,y_0) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x_0,y_0) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x+y & = & 0 \\ x+2y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = 0.$$

On obtient $(0,0)$ comme seul point critique et $f(0,0) = 1$. Si f admet un extremum, c'est nécessairement en $(0,0)$. Pour le savoir, on étudie alors le signe de :

$$\varphi(x,y) = f(x,y) - f(0,0) = x^2 + y^2 + xy.$$

En remarquant que $\varphi(x,y) = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$, on a donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow f(x,y) - f(0,0) \geq 0 \Leftrightarrow f(x,y) \geq f(0,0).$$

f admet donc un minimum global en $(0,0)$.

Attention.

La réciproque est fausse. Un point critique peut ne pas être un extremum local.
Considérons par exemple la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = x^2 - y^2 + 1.$$

On cherche à étudier les extremums de g. On détermine ses points critiques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_1(g)(x_0,y_0) & = & 0 \\ \partial_2(g)(x_0,y_0) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x & = & 0 \\ -2y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = 0.$$

On obtient $(0,0)$ comme seul point critique et $g(0,0) = 1$. Si g admet un extremum, c'est nécessairement en $(0,0)$. Pour le savoir, on étudie alors le signe de :

$$\varphi(x,y) = g(x,y) - g(0,0) = x^2 - y^2.$$

On remarque que :

- $\varphi(x,0) = x^2 > 0$ si $x \neq 0$, donc au voisinage de $(0,0)$, il existe des valeurs prises par g strictement supérieur à $g(0,0)$.
- $\varphi(0,y) = -y^2 < 0$ si $y \neq 0$, donc au voisinage de $(0,0)$, il existe des valeurs prises par g strictement inférieur à $g(0,0)$.

Donc g n'admet par d'extremum en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$.

2 Optimisation sous contrainte

2.1 Le gradient

Définition.

On appelle gradient d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, le vecteur :

$$\overrightarrow{grad}f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}$$

On a vu précédemment que si f admet un extrémum local en (x_0, y_0) alors $\overrightarrow{grad}f(x_0,y_0) = \overrightarrow{0}$. Cette condition n'est pas suffisante, il se peut que le gradient s'annule en un point sans pour autant que f admette un extrémum en ce point.

En pratique, en sciences économiques, si on sait que f admet un seul extremum local et si on ne trouve qu'un seul point critique, alors, c'est forcément un extremum local.

2.2 Extrema liés, contrainte

Ici, on va chercher à déterminer un extremum local de f sachant que les variables x et y sont liées par une relation dite de contrainte de la forme $\phi(x,y) = 0$.
Pour traiter ce type de problème, on va introduire une fonction auxiliaire, appelée fonction de Lagrange $\mathcal{L}$, fonction à trois variables, définie par :

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y)$$

où λ désigne le multiplicateur de Lagrange ou encore le lagrangien.
De la même façon que pour les fonctions à deux variables, on définit le gradient de $\mathcal{L}$ par :

$$\overrightarrow{grad}\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) \end{pmatrix}$$

Théorème 4 (Extremum local sous contrainte)

Si f admet un extrémum local en (x_0, y_0) sous la contrainte $\phi(x,y) = 0$ alors il existe un réel λ_0 tel que :

$$\overrightarrow{grad}\mathcal{L}(x_0,y_0,\lambda_0) = \overrightarrow{0}$$

En d'autres termes, pour déterminer un extrémum, on recherche les points critique de la fonction de Lagrange.

Les dérivées partielles de la fonction de Lagrange sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y))$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y))$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = \phi(x,y)$$

On a donc $\overrightarrow{grad}\mathcal{L}(x_0,y_0,\lambda_0) = \overrightarrow{0}$ si et seulement (x_0, y_0, z_0) est solution du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)) = 0 \\ \phi(x,y) = 0 \end{cases}$$

Exemple. On considère la fonction de production f définie par $f(x,y) = x^4 + y^4$ où x désigne le capital et y le travail.
On cherche le minimum de la fonction f sous la contrainte $x + y = 500$.
La fonction ϕ est donc définie par $\phi(x,y) = x + y - 500$ de sorte que $\phi(x,y) = 0$.
La fonction de Lagrange associée est donc définie par :

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^4 + y^4 + \lambda(x + y - 500)$$

On a donc :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = 4x^3 + \lambda$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 4y^3 + \lambda$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = x + y - 500$$

Le gradient de la fonction de Lagrange est nul lorsque :

$$\begin{cases} 4x^3 + \lambda = 0 \\ 4y^3 + \lambda = 0 \\ x + y - 500 = 0 \end{cases}$$

On déduit des deux premières équations que $x = y$ et la troisième équation nous donne alors $x = y = \frac{500}{2} = 250$.

3 Exercices

Exercice 1
Étudier les extremums des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad g(x) = e^x - x \qquad h(x) = \frac{x^2}{2} - \ln(x)$$

Exercice 2
On définit la fonction f par :

$$f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{4 - x^2}.$$

1. Quelle est l'ensemble de définition de f?
2. Montrer que, pour tout $x \in]-2, 2[$, on a :
$$f'(x) = \frac{3x(3 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}}.$$
3. Étudier le signe de f' puis dresser le tableau de variation de f.
4. En déduire les extremums de f.

Exercice 3
Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes et déterminer si elles admettent des points critiques :

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $g(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$
3. $h(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Exercice 4
1. (a) Étudier les variations de la fonction f définie par : $f(t) = t - \ln(t) - \frac{1}{t}$.
   (b) Justifier que $t = 1$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = 0$.
2. On considère la fonction $g(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x)$.

(a) Déterminer les dérivées partielles de g.

(b) Montrer que $A = (x, y)$ est un point critique de g si et seulement si

$$\begin{cases} \ln(y) - \dfrac{y}{x} & = & 0 \\ f\left(\dfrac{x}{y}\right) & = & 0 \end{cases}$$

(c) En déduire que le seul point critique de g est (e, e).

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 9x^2 + 8xy + 3y^2 + x - 2y.$$

1. Déterminer les dérivées partielles de f.
2. Montrer que f admet un seul point critique sur $\mathbb{R}^2$ de coordonnée $(-1/2, 1)$.
3. Calculer $f(-1/2, 1)$.
4. Développer l'expression suivante :

$$3\left(y + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

5. En déduire que f admet un minimum global en $(-1/2, 1)$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y.$$

1. (a) Calculer les dérivées partielles de f.

   (b) En déduire que le seul point critique de f est $A = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.

   (c) Calculer $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.

2. (a) Développer $2(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{2}(y - \frac{1}{6})^2$.

   (b) En déduire que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

3. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$

   (a) Utiliser la question 2. pour établir que: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) \geq -\frac{1}{6}$.

   (b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 7

Soit f la fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^3 + y^3.$$

1. Calculer les dérivées partielles de f.
2. En déduire que f admet un unique point critique dont on déterminera les coordonnées.
3. En étudiant le signe de $f(x, 0)$, justifier que f n'a pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8

Soit f la fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

1. (a) Calculer les dérivées partielles de f.
   (b) Montrer que f admet trois points critiques $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.
2. Étude du point critique $(0, 0)$.
   (a) On pose $\varphi(x) = f(x, x)$. Dresser le tableau de variation de φ.
   (b) On pose $\psi(x) = f(x, -x)$. Dresser le tableau de variation de ψ.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que f n'admet pas d'extremum en $(0, 0)$.
3. Étude du point critique $(1, 1)$.
   (a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
   $$f(x, y) - f(1, 1) = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + 2(x - y)^2.$$
   (b) Que peut-on en déduire?
4. Étude du point critique $(-1, -1)$.
   (a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x, -y) = f(x, y)$.
   (b) Que peut-on en déduire?

Exercice 9

Optimiser la fonction objectif $Z : (x, y) \longmapsto 4x^2 + 3xy + 6y^2$ sous la contrainte $x + y = 56$.

Exercice 10

Un consommateur dispose d'une somme R pour acheter x unités du bien A et y unités du bien B. On suppose x et y sont fractionnables.
Le prix unitaire du bien A est $p_A = 3$ et le prix unitaire du bien B est $p_B = 2$.

1. Déterminer, en fonction de R, les quantités x_0 et y_0 qui maximisent la fonction d'utilité (on utilisera la méthode de Lagrange).
2. Déterminer alors la courbe de demande du consommateur (y en fonction de x).

Exercice 11

Dans cet exercice, la fonction d'utilité est $U(x, y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}}$.
Les prix unitaires des biens A et B sont respectivement 40 et 30 et le revenu est $R = 800$.
Déterminer les quantités x_0 et y_0 qui maximisent U par la méthode de Lagrange.

Exercice 12

On considère la fonction f définie par $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

1. Déterminer les points critiques de la fonction de Lagrange associée à f.
2. Calculer $f(x, y)$ pour chacun des points critiques trouvées en 1.
3. Montrer que $f(x, y) = \dfrac{1}{2}(x + y)^2 - \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
   En déduire que les valeurs trouvées en 2. sont des extrémums globaux.

Exercice 13 (Extrait de l'interrogation 2 (2017-18))

On considère la fonction de production Q définie par : $Q(K,L) = K^4 + L^4$. Le problème consiste à minimiser cette fonction sous la contrainte linéaire $K + L = 2$. On note $\mathcal{L}(K,L,\lambda)$ le lagrangien défini par :

$$\mathcal{L}(K,L,\lambda) = K^4 + L^4 + \lambda(K + L - 2).$$

1. (a) Déterminer les dérivées partielles de $\mathcal{L}$.
   (b) Montrer que si (K_0, L_0, λ_0) est un point critique de $\mathcal{L}$ alors $K_0 = L_0$.
   (c) En déduire que $\mathcal{L}$ admet un unique point critique (K_0, L_0, λ_0) dont on déterminera les coordonnées.
   (d) Calculer $Q(K_0, L_0)$.
2. (a) Montrer que $Q(K,L) = K^4 + (2-K)^4$ sous la contrainte $K + L = 2$.
   On pose pour la suite $f(x) = x^4 + (2-x)^4$.
   (b) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 8(x-1)(x^2 - 2x + 4)$.
   (c) Déterminer le signe de f' et en déduire les variations de f.
   (d) En déduire que f réalise un minimum et déterminer ce minimum.
   (e) Que peut-on en déduire sur la fonction de production Q?

Exercice 14 (Extrait du DST (2017-18))

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

1. (a) Calculer les dérivées partielles de f.
   (b) Montrer que, si (x_0, y_0) est un point critique de f, alors $x_0 = -y_0$.
   (c) En déduire que f admet exactement trois points critiques $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
2. Étude du point critique $(0,0)$.
   (a) On pose $\varphi(x) = f(x,0) - f(0,0)$. Déterminer le signe de $\varphi(x)$.
   (b) On pose $\psi(x) = f(x,x) - f(0,0)$. Déterminer le signe de $\psi(x)$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$.
3. Étude du point critique $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
   (a) Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
   $$f(x,y) - f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + 2(x+y)^2.$$
   On pourra développer les deux membres de l'égalité et vérifier qu'ils sont bien égaux.
   (b) En déduire que f admet un minimum global en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
4. Étude du point critique $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
   (a) Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(y,x) = f(x,y)$.
   (b) Que peut-on en déduire sur la nature du point critique $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$?