Chapitre 4

Fonctions polynômiales et rationnelles

Compétences attendues.

✓ Effectuer une division euclidienne.

✓ Factoriser un polynôme à l'aide d'une division euclidienne ou par identification.

✓ Factoriser une fonction rationnelle avec éventuellement une mise au même dénominateur.

✓ Décomposer en éléments simples une fonction rationnelle.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Fonctions polynômiales

1.1 Définition et premières propriétés

Définition.

On dit qu'une fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une **fonction polynômiale** ou un **polynôme** s'il existe un entier naturel n et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Les réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont appelés **coefficients** de P.

Exemples.

- La fonction $x \mapsto 0$ est appelée le polynôme nul.
- Les fonctions constantes, les fonctions affines sont des polynômes.
- Soit n un entier naturel et a un réel non nul. On appelle **fonction monômiale** ou **monôme** de degré n et de coefficient a la fonction $x \mapsto ax^n$. Une fonction monômiale est en particulier une fonction polynômiale.

Théorème 1 (Unicité de l'écriture d'un polynôme)

Deux fonctions polynômiales sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients.
Autrement dit, si $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ sont deux fonctions polynômiales, alors :

$$P = Q \ \Leftrightarrow\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ a_k = b_k.$$

Ainsi, les coefficients d'un polynôme sont uniques.

Remarque. En particulier, un polynôme est nul si ces coefficients sont nuls.

Propriété 2 (Opérations sur les polynômes)

(1) La somme et le produit de deux fonctions polynomiales sont des fonctions polynomiales.

(2) La dérivée d'une fonction polynomiale est une fonction polynomiale.

Remarque. L'expression $x^2 - 1$ est un nombre réel qui dépend de la valeur de x. Il peut être positif (par exemple si $x = 2$), nul (si $x = 1$) ou négatif (si $x = 0$). Par contre, la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ n'est ni positive, ni nulle, ni négative.

Il existe une notation qui permet de ne pas confondre l'expression et la fonction. Notons X la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ X(x) = x$. Alors, un polynôme P défini pour tout réel x par $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ pourra aussi être noté de la façon suivante :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

On dit que P est un polynôme d'indéterminée X et on désignera par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'indéterminée X.

1.2 Degré d'un polynôme

Définition.

Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme dont les coefficients a_i sont non tous nuls.

- On appelle **degré** de P, et on note $deg(P)$, le plus grand entier N tel que $a_N \neq 0$.
- Le coefficient a_N est alors appelé le **coefficient dominant** de P.

On conviendra que le polynôme nul est de degré $-\infty$. L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus $n \in \mathbb{N}$ est noté $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemples.

- Les polynômes constants et non nuls sont de degré 0.
- Si $P(x) = x^2 - 2x + 1$ et $Q(x) = 2x^3 + x + 2$, alors $deg(P) = 2$, $deg(Q) = 3$, $deg(P + Q) = 3$ (car $P(x) + Q(x) = 2x^3 + x^2 - x + 3$) et $deg(PQ) = 5$ (car $P(x)Q(x) = 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 3x + 2$).

Propriété 3 (Degré d'une somme et d'un produit)

Soient P et Q deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors :

(1) $deg(P + Q) \leq max(deg(P), deg(Q))$

(2) $deg(\lambda.P) = deg(P)$

(3) $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$

2 Factorisation d'un polynôme

Un polynôme peut s'écrire sous forme **développée** (c'est-à-dire comme une somme de monômes) ou sous forme **factorisée** (c'est-à-dire comme produit de polynômes de degré 1 ou de polynômes de degré 2 sans racine). Par exemple,

- Développer $P(x) = x(x + 1)(x + 3)$, c'est l'écrire sous la forme $P(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$.
- Factoriser $Q(x) = x^3 - 1$, c'est l'écrire sous la forme $Q(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

La factorisation d'un polynôme est un outil essentiel pour obtenir ses racines ou son signe ou pour la simplification d'une écriture fractionnaire. **On cherchera donc toujours à factoriser un polynôme**.

Nous donnons ici les méthodes pour mettre un polynôme sous forme factorisée.

2.1 Divisibilité

Définition.

Soient A, B deux polynômes. On dit que B **divise** A ou que A est un **multiple** de B et on note $B|A$ s'il existe un polynôme Q tel que : $A = BQ$.

Exemple. Le polynôme $B(x) = x^2 + 1$ divise le polynôme $A(x) = x^6 + 1$. En effet, si on considère le polynôme $Q(x) = x^4 - x^2 + 1$, alors :

$$B(x)Q(x) = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = x^6 + 1 = A(x).$$

Remarques. Soient A, B, C trois polynômes. Alors :

1. Si B divise A, alors $deg(B) \leq deg(A)$.
2. Si C divise B et si B divise A, alors C divise A.

Pour étudier la divisibilité de deux polynômes, on pourra effectuer une division euclidienne. Le principe est le même que pour la division euclidienne sur les entiers :

Théorème 4 (de la division euclidienne)

Soient A, B deux polynômes tels que $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ deg(R) < deg(B) \end{cases}$$

Q et R sont appelés le **quotient** et le **reste** de la **division euclidienne** de A par B.

Remarque. Soient A, B deux polynômes, avec $B \neq 0$. Alors B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Exemples.

1. Effectuer la division euclidienne de $A(x) = x^4 + 2x^3 - x + 1$ par $B(x) = x^2 - x + 1$.

2. Effectuer la division euclidienne de $A(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ par $B(x) = x + 1$.

2.2 Racines

Définition.

Soient P un polynôme et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est une **racine** de P si $P(a) = 0$.

Exemples.

- -1 et 1 sont racines du polynôme $P(x) = x^2 - 1$.
- Le polynôme $P(x) = x^2 + 2x + 2$ n'admet pas de racine (car c'est un polynôme de degré 2 dont le discriminant est négatif).

Théorème 5 (Caractérisation d'une racine d'un polynôme)

Soient P un polynôme de degré n et $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$P(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-a)|P.$$

Autrement dit, a est une racine de P si et seulement si il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-a)Q(x).$$

Preuve.

□

Exemple. $0, 1$ et 3 sont racines du polynôme $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$. Donc les polynômes $A(x) = x$, $B(x) = x - 1$ et $C(x) = x - 3$ divise le polynôme P. Ceci est en effet le cas :

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x = x(x-1)(x-3) = A(x)B(x)C(x).$$

Propriété 6 (Nombre de racines d'un polynôme)

Tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

Remarque. En particulier, un polynôme de degré n admettant au moins $n+1$ racines est le polynôme nul.

Exemple. On considère le polynôme $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

1. Vérifier que -2, -1 et 1 sont racines du polynôme P. Est-ce que P admet d'autres racines ?

2. En déduire une factorisation de P.

2.3 Factorisation

Méthode.

On a vu que a est racine d'un polynôme P de degré n si et seulement si il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-a)Q(x)$. Pour déterminer Q, on a deux options :

- Soit poser la division euclidienne de P par $(x-a)$.
- Soit écrire $P(x) = (x-a)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1})$, développer le second membre et identifier les coefficients.

Exemple. Considérons le polynôme $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$. Tout d'abord, on remarque que 1 est racine de P (puisque $1 - 5 + 3 + 1 = 0$).

Il existe donc un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)Q(x)$. On cherche à déterminer Q.

- Première méthode : en posant la division euclidienne :

- Deuxième méthode : en posant $Q(x) = ax^2 + bx + c$:

3 Fonctions rationnelles

3.1 Définition

Définition.

On appelle **fonction rationnelle** toute fonction R qui est le quotient de deux polynômes P et Q :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Notons que R est définie sur $\mathbb{R}$ privé des racines du polynôme Q.

Exemple. La fonction rationnelle $R(x) = \dfrac{x+2}{x(x+1)(x^2+1)}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

Remarque. Une fonction rationnelle peut s'écrire sous forme **factorisée** (avec éventuellement une mise au même dénominateur) ou sous forme **développée** (en effectuant une décomposition en éléments simples). Par exemple,

- Factoriser $R(x) = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+3}$, c'est l'écrire sous la forme $R(x) = \dfrac{2x+1}{(x-2)(x+3)}$.
- Développer $S(x) = \dfrac{x+8}{(x-1)(x+2)^2}$, c'est l'écrire sous la forme $S(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{x}{(x+2)^2}$.

La forme **factorisée** permettra par exemple d'obtenir le signe de la fonction rationnelle. La forme **développée** servira pour faire du télescopage ou obtenir une primitive.

Nous donnons dans la suite les méthodes pour mettre une fonction rationnelle sous forme factorisée ou sous forme développée.

3.2 Mise au même dénominateur

Méthode.

Pour factoriser une fonction rationnelle,

1. On factorise les dénominateurs des fractions.
2. On détermine le dénominateur commun : c'est le produit des facteurs aux dénominateurs en prenant pour chacun la puissance la plus élevée où il apparait.
3. On fait apparaitre le dénominateur commun dans chacune des fractions en multipliant par la même quantité au numérateur et au dénominateur.
4. On peut alors écrire la fonction rationnelle avec une seule fraction en sommant les numérateurs.
5. Pour finir, on développe puis on factorise le numérateur.

Exemple. Factoriser la fonction rationnelle $R(x) = \dfrac{2}{x^2-4} + \dfrac{x}{x^2+4x+4}$.

3.3 Décomposition en éléments simples

Méthode.
Pour développer une fonction rationnelle en une somme de fonctions rationnelles plus simples, on réduit la somme au même dénominateur, puis on procède par identification des coefficients des numérateurs.

Exemple. Déterminer les réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$