

Chapitre IV

Relations d'équivalences

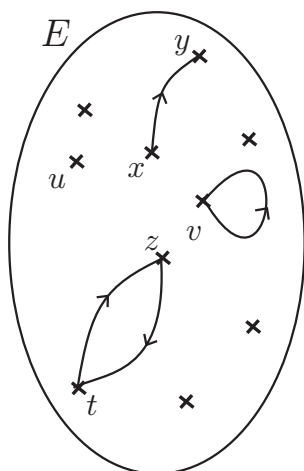
I - Définitions et exemples

Soit E un ensemble non vide.

Définition 1 :

- 1/ On appelle **relation binaire dans E** , tout énoncé logique qui dépend d'un couple d'éléments de E . Autrement dit, si pour tout $(x, y) \in E^2$, $\mathcal{R}(x, y)$ est un énoncé logique, on dira : **$\mathcal{R}$ est une relation binaire dans E** .
- 2/ Si $\mathcal{R}$ est une relation binaire dans E , alors pour tout $(x, y) \in E^2$, l'énoncé $\mathcal{R}(x, y)$ sera noté : **$x \mathcal{R} y$**
- 3/ Soit $\mathcal{R}$ est une relation binaire dans E et $(x, y) \in E^2$.
 - ▷ Si l'énoncé $x \mathcal{R} y$ est vrai, on dit (et on écrit) : " **x est en relation avec y modulo $\mathcal{R}$** " ou bien encore : "**On a $x \mathcal{R} y$** ".
 - ▷ Si l'énoncé $x \mathcal{R} y$ est faux, on dit : " **x n'est pas en relation avec y modulo $\mathcal{R}$** " ou bien encore : "**On n'a pas $x \mathcal{R} y$** ", ou bien encore : "**On a $x \not\mathcal{R} y$** ".

Diagramme sagittal d'une relation binaire : Pour $(x, y) \in E^2$, on relie x à y par une flèche dirigée de x vers y , pour traduire que l'on a $x \mathcal{R} y$; s'il n'y a pas de flèche reliant x et y , c'est qu'on n'a pas $x \mathcal{R} y$.



Par exemple, on a :

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ v \mathcal{R} v \\ z \mathcal{R} t \\ t \mathcal{R} z \\ u \not\mathcal{R} x \end{cases}$$

EXEMPLES 1 :

1/ La relation d'égalité dans E

Dans l'ensemble E , considérons, pour tout $(x, y) \in E^2$, l'énoncé $\mathcal{R}(x, y) = "x = y"$. Alors $\mathcal{R}$ est une relation binaire dans E . Cette relation binaire $\mathcal{R}$ est définie dans E par :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \iff x = y$$

Cette relation binaire s'appelle "*relation d'égalité dans E* ".

2/ Considérons, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'énoncé $\mathcal{R}(x, y) = "x \geq y"$. Alors $\mathcal{R}$ est une relation binaire dans $\mathbb{R}$. Cette relation binaire $\mathcal{R}$ est définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \mathcal{R} y \iff x \geq y$$

On a par exemple : $6 \mathcal{R} 2$ et $1 \not\mathcal{R} 2$

3/ Les relations de perpendicularité et de parallélisme sur l'ensemble des droites

Soit $\mathcal{P}$ un plan ; désignons par $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites de $\mathcal{P}$. Pour tout couple de droites $(D_1, D_2) \in \mathcal{D}^2$, considérons les énoncés : $\mathcal{R}(D_1, D_2) = "D_1 \parallel D_2"$ et $\mathcal{S}(D_1, D_2) = "D_1 \perp D_2"$. Alors $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont des relations binaires, appelées respectivement "*relation de parallélisme*" et "*relation de perpendicularité*"; elles sont définies par :

$$\left[\forall (D_1, D_2) \in \mathcal{D}^2, D_1 \mathcal{R} D_2 \iff D_1 \parallel D_2 \right] \quad \text{et} \quad \left[\forall (D_1, D_2) \in \mathcal{D}^2, D_1 \mathcal{S} D_2 \iff D_1 \perp D_2 \right]$$

4/ La congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$ (où $n \in \mathbb{N}$)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, l'énoncé $\mathcal{M}(x, y) = "n \mid x - y"$ (autrement dit : $\mathcal{M}(x, y) = "\exists k \in \mathbb{Z}, x - y = kn"$). Alors $\mathcal{M}$ est une relation binaire ; elle est définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \mathcal{M} y \iff n \mid x - y$$

Cette relation binaire s'appelle "*congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$* ".

Au lieu d'écrire : $x \mathcal{M} y$, on écrira $x \equiv y [n]$ et on dira " *x est congru à y modulo n* ".

Définitions 2 :

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire dans E . On dit que :

1/ **$\mathcal{R}$ est réflexive** si : $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$

2/ **$\mathcal{R}$ est symétrique** si : $\forall (x, y) \in E^2, [x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x]$

3/ **$\mathcal{R}$ est transitive** si : $\forall (x, y, z) \in E^3, [(x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \implies x \mathcal{R} z]$

Définition 3 :

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire dans E . On dit que **$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence** si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

EXEMPLES 2 :

- 1/ Soit $\mathcal{P}$ un plan et $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites de $\mathcal{P}$. Alors la relation de parallélisme est une relation d'équivalence dans $\mathcal{D}$ mais la relation de perpendicularité n'en n'est pas une.
- 2/ La relation de congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$ (où $n \in \mathbb{N}$) est une relation d'équivalence.
- 3/ La relation d'égalité sur un ensemble non vide est une relation d'équivalence.

II - Classes d'équivalences et ensemble quotient

Dans ce paragraphe, E est un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans E .

Définition 4 :

- 1/ Pour tout $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$** , la partie de E notée $Cl_{\mathcal{R}}(x)$ ou bien $\bar{x}$ (si aucune confusion n'est possible) et définie par :

$$\bar{x} = \{y \in E \mid y \mathcal{R} x\}$$

Autrement dit pour $x \in E$:

$$\forall y \in E, [y \in \bar{x} \iff y \mathcal{R} x]$$

- 2/ On appelle **ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$** , l'ensemble noté $E/\mathcal{R}$, et défini par :

$$E/\mathcal{R} = \{\bar{x} \mid x \in E\}$$

Autrement dit :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), [X \in E/\mathcal{R}] \iff [\exists x \in E, \bar{x} = X]$$

EXEMPLES 3 :

- 1/ Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ la relation d'égalité dans E . Alors quelque soit $x \in E$, on a :
 $\bar{x} = \{x\}$. on en déduit que $E/\mathcal{R} = \{\{x\} \mid x \in E\}$
- 2/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Si on désigne par $\mathcal{M}$ la relation de congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a : $\bar{x} = \{x + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 - ★ Si $n = 0$, alors $\bar{x} = \{x\}$ et $\mathbb{Z}/\mathcal{M} = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{Z}\}$.
 - ★ Si $n = 1$, alors $\bar{x} = \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/\mathcal{M} = \{\mathbb{Z}\}$.
 - ★ Si $n \geq 2$, alors $\mathbb{Z}/\mathcal{M} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$.

Proposition 1 :

- 1/ $\forall x \in E, \bar{x} \subset E$ et $x \in \bar{x}$.
- 2/ Soit $(x, y) \in E^2$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $x \mathcal{R} y$

ii) $x \in \bar{y}$

iii) $y \in \bar{x}$

iv) $\bar{x} = \bar{y}$

Corollaire 1 :

Soit $X \in E/\mathcal{R}$. Alors :

- 1/ Il existe $x_0 \in E$ tel que $\bar{x}_0 = X$.
- 2/ Pour tout $x \in E$, $x \in X \iff \bar{x} = X$.

Tout élément de X s'appelle **représentant de X**

Définition 5 :

Soit Ω un ensemble non vide. On appelle **partition** de Ω , toute partie non vide $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que l'on ait les deux conditions suivantes :

- $\triangleright \forall A \in \mathfrak{P}, A \neq \emptyset$
- $\triangleright \forall x \in \Omega, \exists ! A \in \mathfrak{P}, x \in A$

EXEMPLES 4 :

1/ Soit $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

- $\triangleright$ Soit $\mathfrak{P}_1 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$. Alors $\mathfrak{P}_1$ est une partition de Ω .
Posons $\mathfrak{P}_2 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\mathfrak{P}_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ et $\mathfrak{P}_4 = \{\{1, 2, 3\}\}$. Alors $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ et $\mathfrak{P}_4$ sont aussi des partitions de Ω .
- $\triangleright$ Par contre $\mathfrak{P}_5 = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}$, $\mathfrak{P}_6 = \{\{1\}, \{2\}\}$ et $\mathfrak{P}_7 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ ne sont pas des partitions de Ω .

2/ $\{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{*-}\}$ est une partition de $\mathbb{R}$.

3/ Soit $\Omega = \mathbb{N}$. Posons $A_0 = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$, $A_1 = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ et $A_2 = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$. Posons $\mathfrak{P} = \{A_0, A_1, A_2\}$. Alors $\mathfrak{P}$ est une partition de Ω .

Proposition 2 :

- 1/ Pour tout $(X, Y) \in E/\mathcal{R} \times E/\mathcal{R}$, on a : $X = Y$ ou $X \cap Y = \emptyset$.
- 2/ $E/\mathcal{R}$ est une partition de E .
