Chapitre 4

Intégration

1 Primitives

Définition.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ telle que :

- F est dérivable sur I.
- Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple. $F(x) = e^{x^2+1}$ est une primitive de $f(x) = 2xe^{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$.

Théorème 1 (Primitives d'une fonction continue)

(1) Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet une **primitive** F sur I.

(2) Si une fonction f est **continue** sur un intervalle I et si F est une primitive de f sur I, alors toute **primitive** de f sur I est de la forme $F + k$, où k est une constante réelle.

Remarque. Ainsi, une fonction continue sur un intervalle I n'admet pas qu'une seule primitive sur I. On ne parle donc jamais de LA primitive mais d'UNE primitive d'une fonction.

Propriété 2 (Primitives et opérations)

Soient f et g deux fonctions admettant des primitives F et G sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

(1) $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

(2) λF est une primitive de λf sur I.

Attention.

Les primitives d'un produit fg ne sont pas le produit des primitives. En effet,

$$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg \neq fg.$$

Voici le tableau des primitives usuelles à connaître :

Fonction $f(x) = ...$	Primitives $F(x) = ...$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k,\ k \in \mathbb{R}$
$u'(x)(u(x))^{-1} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\|u(x)\| + k,\ k \in \mathbb{R}$
$u'(x)(u(x))^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k,\ k \in \mathbb{R}$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ (cas particulier où $\alpha = \dfrac{1}{2}$)	$2\sqrt{u(x)} + k,\ k \in \mathbb{R}$

2 Intégration sur un segment

Définition.

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et $a, b \in I$.
On appelle **intégrale** de f entre a et b le réel noté $\int_a^b f(x)dx$ et défini par :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarques.

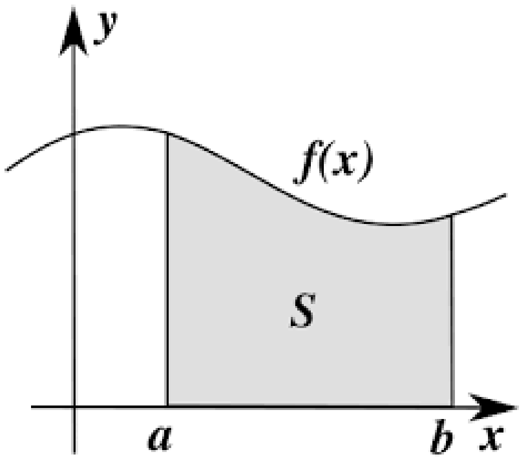
1. La notion d'intégrale est indépendante de la primitive choisie : si F et G sont deux primitives de f, alors $G = F + k$ pour un $k \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a).$$

2. La lettre x dans l'intégrale est muette. On notera indifféremment $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b f(t)dt$, $\int_a^b f(u)du$...
3. A partir de la définition de l'intégrale, on obtient immédiatement les formules suivantes :

$$\int_a^b 0dx = 0, \qquad \int_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Interprétation graphique. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a \leq b$, alors $\int_a^b f(x)dx$ est égale à l'aire algébrique de la surface S délimitée par la courbe représentative de f et l'axe des abscisses entre les abscisses a et b dans un repère orthonormé.



Plus généralement, si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$, avec $a \leq b$, alors $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$ est égale à l'aire algébrique de la surface S délimitée par les courbes représentatives de f et de g entre les abscisse a et b dans un repère orthonormé.

Méthode.

Pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, on détermine une primitive F de f et on utilise la définition de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple. Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x}dx$,

- on commence par déterminer une primitive F de $f(x) = \dfrac{1}{x}$: par exemple $F(x) = \ln(x)$,
- on utilise ensuite la définition de l'intégrale :

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_e^{e^2} = \ln(e^2) - \ln(e) = 2 - 1 = 1.$$

Donc $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x}dx = 1$.

3 Propriétés de l'intégrale

Théorème 3 (Propriétés de l'intégrale)

(1) **Linéarité de l'intégrale** : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et soit $a, b \in I$. Pour tout réel λ, on a:

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(2) **Relation de Chasles** : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a, b, c \in I$. Alors:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(3) **Intégration des inégalités** : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I telles que, pour tout réel $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$.

- Bornes croissantes : Si $a, b \in I$, $a \leq b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
- Bornes décroissantes : Si $a, b \in I$, $a \geq b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

4 Exercices

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx \qquad B = \int_{-4}^4 2xe^{x^2}dx \qquad C = \int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx \qquad D = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln(x)}$$

$$E = \int_0^1 xe^{-x^2}dx \qquad F = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}} \qquad G = \int_{1/2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx \qquad H = \int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}dx$$

$$I = \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx \qquad J = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+4x}} \qquad K = \int_{-1}^1 |x|\,dx \qquad L = \int_0^2 \max(1,x)dx$$

Exercice 2

1. Vérifier que : $\forall x \neq \pm 1$, $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2(1-x)} + \dfrac{1}{2(1+x)}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$.

Exercice 3

1. (a) Vérifier que : $\forall x \neq 0,\ \dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$.

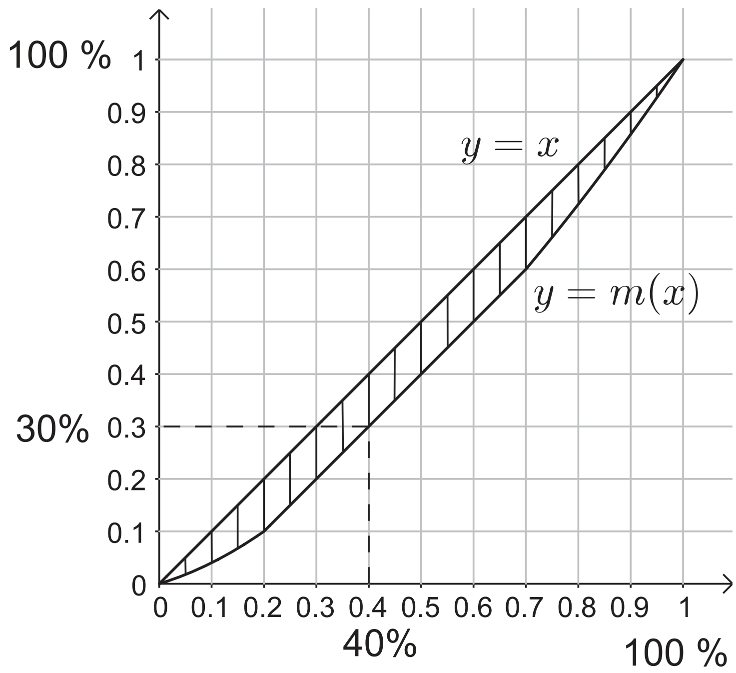
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

2. (a) Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2+1}$.

   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx$.

Exercice 4

La courbe ci-après, appelée courbe de Lorentz, représente une fonction m, définie sur $[0;1]$. Elle illustre la répartition des richesses d'un pays donné.



En abscisses x représente le pourcentage des personnes les plus pauvres par rapport à la population totale et en ordonnées $m(x)$ représente le pourcentage des richesses totales qu'ils possèdent.
Par exemple, 40% des personnes en partant des plus pauvres possèdent 30% des richesses totales. On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$f(x) = \frac{x^3+x}{2} \text{ et } g(x) = \frac{e^x - 1 + x}{e}$$

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont respectivement les courbes de Lorentz pour un pays F et un pays G.

1. Déterminer pour chacun de ces deux pays le pourcentage des richesses possédées par 50% des personnes en partant des plus pauvres.

2. Parmi ces deux pays, quel est celui pour lequel les richesses sont réparties de la manière la plus égalitaire?

3. On appelle coefficient de Gini le nombre $2\mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine hachuré sur la figure. Le coefficient de Gini évalue le degré d'inégalité de la répartition des richesses.

   Calculer le coefficient de Gini pour chacun des pays F et G.

Exercice 5

Soit p et q le prix et la quantité d'un produit donné dans une économie fermée. L'expression du prix en fonction de la quantité vue du consommateur est définie à l'aide de la fonction demande $p = D(q)$, L'expression du prix en fonction de la quantité vue du producteur est définie à l'aide de la fonction offre $p = O(q)$.
Les lois de la demande D et de l'offre O sont données par :

$$D(q) = 30e^{-5q} \text{ et } O(q) = e^{5q+1}$$

1. Déterminer les valeurs p_0 et q_0 à l'équilibre.
2. À l'équilibre, le consommateur obtient la quantité q_0 au prix p_0, alors qu'il était prêt à payer davantage. La valeur moyenne p^* des prix supérieurs à p_0 qu'il était prêt à payer est $p^* = \dfrac{1}{q_0}\displaystyle\int_0^{q_0} D(q)dq$.

   Calculer p^*.
3. On appelle alors surplus du consommateur la quantité ainsi définie par:

$$S_C = \int_0^{q_0} D(q)dq - p_0q_0$$

   Montrer que dans notre exemple le surplus du consommateur est : $S_C = q_0(p^* - p_0)$.

Exercice 6

Les lois de la demande D et de l'offre O sont données par :

$$D(q) = 42 - 5q - q^2 \text{ et } O(q) = 2q + 12$$

1. Déterminer les valeurs p_0 et q_0 à l'équilibre.
2. Déterminer le surplus du consommateur.

Exercice 7

La loi d'offre O est donnée par :

$$O(q) = (q + 3)^3,\ p_0 = 81 \text{ et } q_0 = 6$$

On appelle alors surplus du producteur la quantité ainsi définie par :

$$S_P = p_0q_0 - \int_0^{q_0} O(q)dq$$

Calculer le surplus du producteur.

Exercice 8

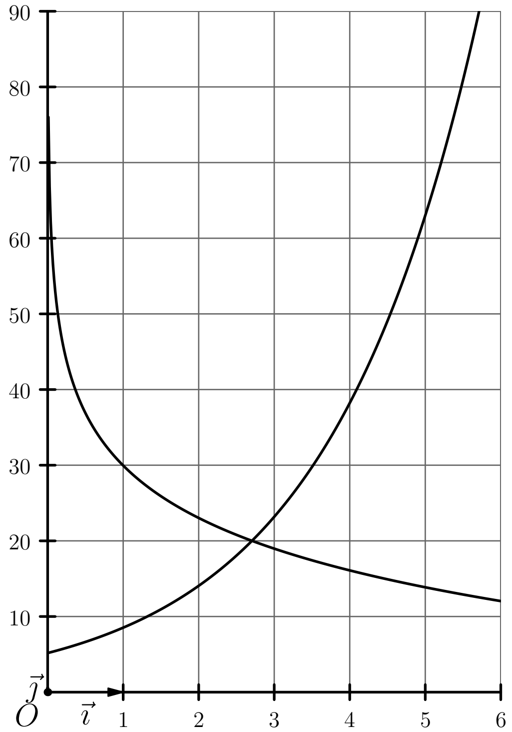
Une nouvelle console de jeux est mise sur le marché. Soit p le prix unitaire en centaines d'euros de cette console.
La fonction d'offre des fournisseurs (en milliers de consoles) est la fonction f définie sur $]0;6]$ par:

$$f(p) = 0,7e^{0,5p+2}$$

où $f(p)$ est la quantité proposée par les fournisseurs pour un prix unitaire de p.
La fonction de demande des consommateurs (en milliers de consoles) est la fonction g définie sur $]0;6]$ par :

$$g(p) = 10\ln\left(\frac{20}{p}\right)$$

où $g(p)$ est la quantité demandée par les consommateurs pour un prix unitaire de p.
Les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g sont tracées ci-dessous :



1. Identifier les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
2. Que représente le point d'intersection de ces deux courbes d'un point de vue économique ? Lire ses coordonnées sur le graphique.
3. Déterminer à l'aide d'une calculatrice l'abscisse du point d'intersection des deux courbes à 10^{-1} près et l'ordonnée de ce point près à l'unité près.
4. Calculer le surplus des fournisseurs ainsi que le surplus des consommateurs.

Exercice 9 (Extrait de l'interrogation 2 (2017-18))
Pour chacune des questions suivantes, déterminer la réponse correcte parmi les trois proposées :

1. Une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ est :

   (a) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, (b) $x \mapsto x\ln(x)$, (c) $x \mapsto x\ln(x) - x$,

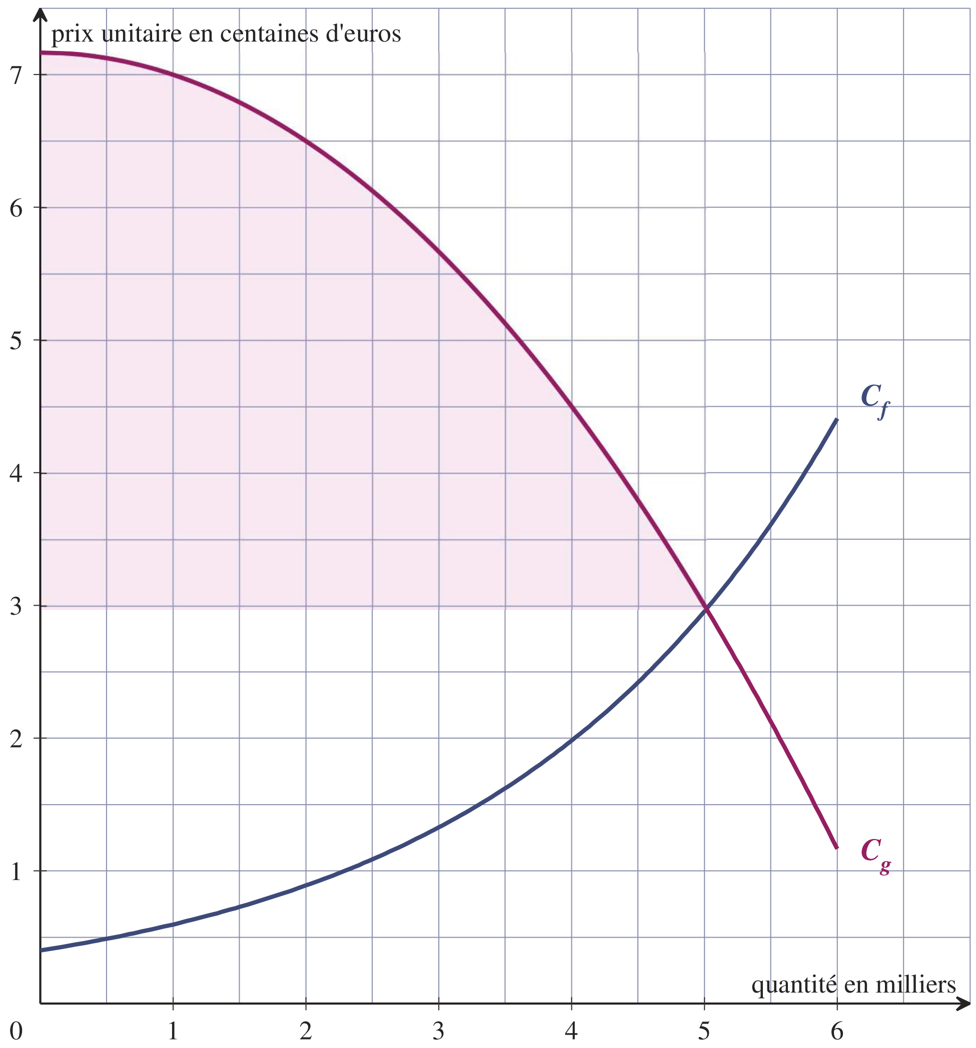
2. L'intégrale $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x))^2}dx$ est égale à :

   (a) $\dfrac{1}{2}$, (b) $\dfrac{3}{2}$, (c) 1.

3. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$ est égale à :

   (a) $\dfrac{1}{e+1}$ (b) $\ln\left(\dfrac{e+1}{2}\right)$ (c) $\ln(e^{-1}+1)$

Exercice 10 (Extrait de l'interrogation 2 (2017-18))
Suite à une étude de marché, l'offre d'un produit est modélisée par une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;6]$ et la demande de ce même produit est modélisée par une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0;6]$. On a tracé ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentant les fonctions f et g.



1. On rappelle que le prix d'équilibre est le prix unitaire qui se forme sur le marché lorsque l'offre est égale à la demande. La quantité d'équilibre est la quantité associée au prix d'équilibre.
   (a) Lire sur le graphique le prix d'équilibre p_0 (en centaines d'euros) et la quantité d'équilibre q_0 (en milliers d'unités).
   (b) Estimer en euros le chiffre d'affaires réalisé par la vente de cette quantité q_0 au prix d'équilibre p_0.
2. Certains producteurs étaient disposés à proposer un prix inférieur au prix d'équilibre. Le gain supplémentaire réalisé par ces producteurs est appelé le surplus des producteurs. Le surplus des producteurs S_P est donné par la formule suivante :

$$S_P = q_0 \times p_0 - \int_0^{q_0} f(q)dq$$

   (a) Indiquer sur la représentation graphique la partie dont l'aire est égale à S_P.
   (b) Donner une estimation à partir du graphique ce surplus (en centaines de milliers d'euros).
3. Certains consommateurs étaient prêts à payer plus cher que le prix d'équilibre. L'économie réalisée par ces consommateurs est appelée le surplus des consommateurs. Le surplus des consommateurs est donné par la formule suivante :

$$S_C = \int_0^{q_0} g(q)dq - p_0 \times q_0.$$

   (a) Indiquer sur la représentation graphique la partie dont l'aire est égale à S_C.
   (b) Donner une estimation à partir du graphique ce surplus (en centaines de milliers d'euros).

4. Dans cette question, on suppose que $f(q) = 2q - 6$ et que $g(q) = -q^2 - q + 22$.
   (a) Déterminer dans ce cas les valeurs du prix d'équilibre p_0 et de la quantité d'équilibre q_0.
   (b) En déduire le surplus du producteur S_P et le surplus du consommateur S_C.

Exercice 11 (Extrait du DST (2017-18))
Un produit conditionné en boîte est mis sur le marché. On désigne par $x \in [0; 9]$ le prix d'une boîte de ce produit en dizaines d'euros.
On admet que la quantité achetée par les consommateurs, en fonction du prix x appliqué sur le marché, est donnée par la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ en centaines de boîtes.
On admet que la quantité proposée sur la marché par les producteurs, en fonction du prix de vente x auquel les producteurs sont disposés à vendre, est donnée par $g(x) = \dfrac{x}{2}$ en centaines de boîtes.

1. Combien de boîtes seront achetées par les consommateurs si le prix de vente est de 40 euros la boîte ?
2. Lorsque l'offre est égale à la demande, le marché a atteint son équilibre.
   (a) Donner le prix d'équilibre p_0, en dizaines euros, et le nombre q_0, en centaines de boîtes, correspondant.
   (b) Déterminer le chiffre d'affaire réalisé dans ce cas.
3. Certains producteurs étaient disposés à proposer un prix inférieur au prix d'équilibre. Le gain supplémentaire réalisé par ces producteurs est appelé le surplus des producteurs. Le surplus des producteurs S_P est donné par la formule suivante :
$$S_P = \int_0^{p_0} g(x)dx$$
   Calculer S_P.
4. Certains consommateurs étaient prêts à payer plus cher que le prix d'équilibre. L'économie réalisée par ces consommateurs est appelée le surplus des consommateurs. Le surplus des consommateurs est donné par la formule suivante :
$$S_C = \int_{p_0}^{9} f(x)dx.$$
   Calculer S_C.
5. (a) Étudier les variations de f et de g sur $[0; 9]$ et tracer leurs courbes représentatives dans un même repère orthonormal.
   (b) Indiquer sur la représentation graphique la partie dont l'aire est égale à S_P et la partie dont l'aire est égale à S_C.