Chapitre 5

Suites réelles

1 Généralités

Définition.

Une **suite réelle** u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ telle que tout élément $n \in \mathbb{N}$ possède une image $u(n)$ par u :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array} \right.$$

Notations.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $u(n)$ est appelé le **terme de rang** n de la suite et on le notera u_n.
2. Une telle application u sera aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n).

Définition.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

On parlera de suites **strictement croissante**, **strictement décroissante** ou **strictement monotone** si les inégalités précédentes sont strictes.

Méthode.

Pour étudier le sens de variation d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite est croissante.
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite est décroissante.

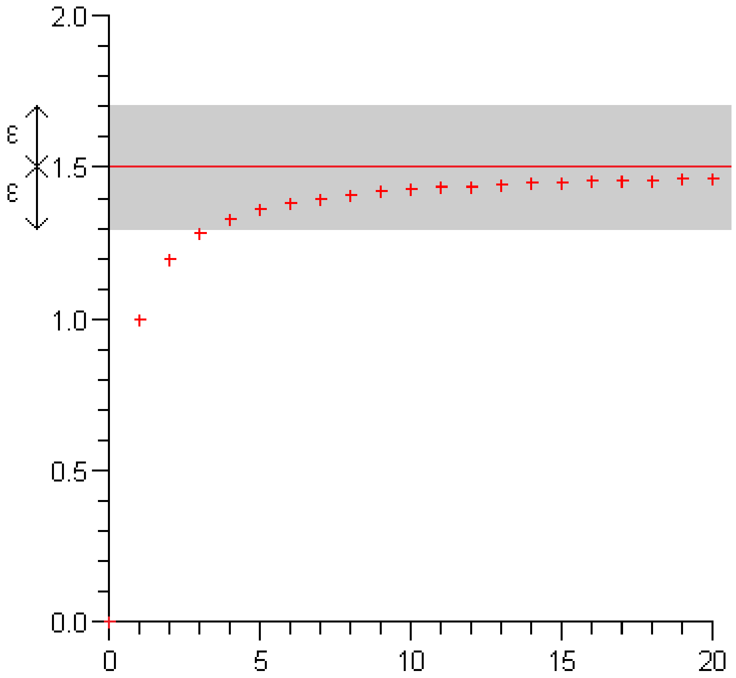
2 Suites convergentes, divergentes

Exemple. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n}{2n+1}$. On cherche à déterminer le comportement de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Voici quelques valeurs numériques de u_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	0	1	1.2	1.286	1.333	1.364	1.385	1.4	1.412	1.421

On remarque que plus n augmente, plus les valeurs de u_n sont proches de $\dfrac{3}{2}$. Cela se voit aussi graphiquement: quelle que soit la largeur ε de la bande horizontale centrée sur la droite $y = \dfrac{3}{2}$, il existe un rang à partir duquel tous les points de la représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont situés dans cette bande :



On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers $\dfrac{3}{2}$. De façon plus formelle, on a la définition suivante :

Définition.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** ou est **convergente** lorsqu'il existe un réel ℓ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang N à partir duquel la quantité $|u_n - \ell|$ est inférieure à ε. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une **limite** ℓ ou admet pour **limite** ℓ.
Lorsqu'elle existe, la **limite** d'une suite est **unique** et elle sera notée $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $\lim u_n$.

Remarque. Il existe des suites qui ne convergent pas. On dit alors qu'elles **divergent** ou qu'elles sont **divergentes**.

Exemple. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = (-1)^n$ est divergente. En effet, $(-1)^n = 1$ si n est pair et $(-1)^n = -1$ si n est impair. En prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, on remarque qu'il n'existe pas de bande horizontale de largeur ε contenant toutes les valeurs de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang.

Parmi les suites divergentes, certaines divergent vers l'infini :

Définition.

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** vers $+\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, lorsque pour tout réel $A > 0$, il existe un rang N à partir duquel u_n est supérieur à A. Autrement dit,

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ u_n \geq A.$$

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** vers $-\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, lorsque pour tout réel $B < 0$, il existe un rang N à partir duquel u_n est inférieur à B. Autrement dit,

$$\forall B < 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ u_n \leq B.$$

Théorème 1 (Limites usuelles)

(1) Pour tout réel $r > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} rn = +\infty$.

Pour tout réel $r < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} rn = -\infty$.

(2) Pour tout réel $q \in]-1, 1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Pour tout réel $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

3 Suites arithmétiques, géométriques

3.1 Suites arithmétiques

Définition.

Une **suite arithmétique** est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est égal à une constante réelle r, appelée **raison** de la suite arithmétique.
En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Théorème 2 (Formule explicite d'une suite arithmétique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une **suite arithmétique** de raison r. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr.$$

3.2 Suites géométriques

Définition.

Une **suite géométrique** est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n,$$

où q est une constante réelle, appelée la **raison** de la suite géométrique.

Théorème 3 (Formule explicite d'une suite géométrique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une **suite géométrique** de raison q. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0,$$

3.3 Sommes arithmétiques, géométriques

Définition.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $p \in \mathbb{N}$. La **somme** $u_0 + u_1 + \ldots + u_p$ se note symboliquement

$$\sum_{k=0}^{p} u_k,$$

et elle se lit "somme de k égal 0 à p des u_k". k s'appelle l'**indice de la somme** et 0 et p les **bornes de la somme**.

Théorème 4 (Sommes arithmétiques, géométriques)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $p \in \mathbb{N}$.

(1) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors :

$$\sum_{k=0}^{p} u_k = (p+1) \times \frac{u_0 + u_p}{2}$$

(2) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q (avec $q \neq 1$), alors :

$$\sum_{k=0}^{p} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{p+1}}{1 - q}.$$

4 Exercices

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 15 - n$.

1. Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique, donner sa raison ainsi et son premier terme u_0.
2. Déterminer son sens de variation et sa limite.

Exercice 2

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $v_0 = -1$.

1. Donner l'expression de (v_n) en fonction de n.
2. Déterminer son sens de variation et sa limite.
3. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Donner l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 3

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On sait que $u_4 + u_7 + u_{13} = 54$ et $u_{10} = 24$.
   (a) Déterminer son premier terme u_0 ainsi que sa raison r.
   (b) En déduire u_n en fonction de n.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On sait que $\sum_{k=0}^{27} v_k = 287$ et $v_{27} = 17$.
   Déterminer son premier terme v_0 ainsi que sa raison r.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n - 2n + 5$ et $u_0 = 4$.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique?
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-t-elle arithmétique?
3. Donner une expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$.
5. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = 2 \times 3^{n-1}$.

1. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique et donner sa raison ainsi que son premier terme u_0.
2. Déterminer son sens de variation et sa limite.

Exercice 6

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et de premier terme 3.

1. Donner l'expression de (v_n) en fonction de n.
2. Déterminer son sens de variation et sa limite.
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique. On sait que $u_3 = \dfrac{4}{3}$ et $u_8 = -324$.

1. Déterminer son premier terme u_0 ainsi que sa raison.
2. En déduire u_n en fonction de n.
3. Déterminer son sens de variation et sa limite.

Exercice 8

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$u_0 = 12,\ v_0 = 1 \ \text{ et } \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3},\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. Pour tout entier naturel n, on pose : $w_n = v_n - u_n$.
   Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. Exprimer w_n en fonction de n.
3. Pour tout entier naturel n, on pose : $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   Montrer que la suite (t_n) est constante.
4. En déduire une expression explicite de u_n et v_n en fonction de n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exercice 9

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que:

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & -1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 2u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 4v_n \end{array}\right.$$

1. On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $p_n = u_n + v_n$.
   Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
2. A l'aide de la question précédente, montrer que: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3v_n + 3^n$.
3. Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$ est arithmétique. En déduire l'expression de z_n en fonction de n.
4. Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 10

Les taux d'intérêts sont composés quand ils s'ajoutent à la fin de chaque période (souvent une année) pour produire à leur tour des intérêts.
On note c_0 le capital initial, c_n le capital au bout de n périodes et i le taux d'intérêt par période.

1. Exprimer c_n en fonction de c_0, i et n.
2. On place 2000 euros pendant dix ans au taux d'intérêt annuel de 5%. De quelle somme disposera-t-on au bout des dix ans ?
3. Pendant combien d'années doit-on placer une somme de 20000 euros au taux annuel de 4% pour disposer de 25000 euros ?
4. Déterminer le nombre d'années nécessaires pour doubler son capital de départ.

Exercice 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 5$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 10$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
3. Déterminer le sens de variation et la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12

Un individu épargne chaque année 20% de son revenu et consomme le reste. Il place son épargne sur un compte fournissant un taux d'intérêt r annuel. Le but de cet exercice est de déterminer dans combien d'années pourra-t-il cesser de travailler sans modifier son niveau de vie.

1. On note R le revenu de l'individu et c_n l'épargne obtenu au bout de n années. On a donc $c_0 = 0$.
   (a) Déterminer c_{n+1} en fonction de c_n, r et R.
   (b) On pose $u_n = c_n + \dfrac{0,2R}{r}$. Montrer que (u_n) est géométrique, donner sa raison et son premier terme.
   (c) Exprimer u_n puis c_n en fonction de n
2. Déterminer la valeur de n en fonction de r qui répond au problème initial.
3. Calculer n dans les cas $r = 2\%$ puis $r = 5\%$.

Exercice 13

Axel âgé de 27 ans décide se constituer une retraite personnelle. Il souhaite disposer, à partir de ses 67 ans et jusqu'à 90 ans, d'une rente annuelle de 24000 euros. Un organisme lui propose de placer à cet effet, tous les ans, le 1er janvier, une somme constante s et l'assure d'un taux d'intérêt de $3,25\%$. On cherche à déterminer la valeur de s.

1. Notons s la somme versée chaque année et r le taux d'intérêt.
   (a) Calculer en fonction de n, r et s le capital s_n dont Axel dispose au bout de n années.
   (b) Donner en fonction de s le capital c obtenu après 40 années de placement.
2. À partir de ses 67 ans, il désire bénéficier d'une rente annuel de 24000 euros pendant 23 années? Le capital diminue d'une année sur l'autre en utilisant la relation de récurrence :

$$c_{n+1} = c_n(1 + r) - 24000 \text{ avec } c_0 = c.$$

   (a) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = c_n - \dfrac{24000}{r}$ est géométrique.
   (b) Répondre au problème posé.

Exercice 14

Un consommateur vient de contracter un emprunt bancaire afin de devenir propriétaire d'un bien immobilier. Il a négocié le bien au prix de 250 000 euros. La banque lui a proposé un prêt à un taux d'intérêt annuel fixe de 2%. L'acheteur dispose d'un apport initial de 50 000 euros. Le montant du remboursement mensuel est de 1 000 euros.
On appelle u_n le montant restant dû à la fin de la n-ième année de l'emprunt.

1. Donner u_0, u_1 et u_2.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,02u_n - 12000$.
3. Montrer que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 600000$ est géométrique.
4. En déduire le terme général de (v_n) puis celui de (u_n).
5. Calculer la limite de la suite (u_n). Interpréter dans le contexte du problème.
6. Quelle est la durée de l'emprunt?
7. Quelle somme l'acheteur a-t-il finalement rendu à la banque ? Quel était donc le montant réel de l'emprunt ?

Exercice 15 (Extrait du DST (2017-18))

Pour chacune des questions suivantes, déterminer la réponse correcte parmi les trois proposées :

1. La limite $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est égale à :

   (a) 0 (b) 1 (c) $+\infty$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n + 5$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

   (a) géométrique de raison 2 (b) géométrique de raison 5 (c) arithmétique de raison 2

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

   La somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est égale à :

   (a) $3^{n+1} - 1$ (b) 2×3^n (c) $2^n - 3^{n+1}$

Exercice 16 (Extrait du DST (2017-18))

Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n + 4n + 1$ et $u_0 = 1$.
   (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ?
   (b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ?
   (c) Donner une expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n.
   (d) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$.
   (e) En déduire une expression de u_n en fonction de n.
2. Sur un compte, les taux d'intérêts s'ajoutent à la fin de chaque année pour produire à leur tour des intérêts.

   On note c_0 le capital initial, c_n le capital au bout de n années et i le taux d'intérêt par année.

   (a) Donner une relation entre c_{n+1} et c_n.
   (b) En déduire une expression de c_n en fonction de c_0, i et n.

(c) On suppose que le compte est rémunéré au taux d'intérêt annuel de 3%. Quel est le nombre d'années nécessaires pour doubler le capital initial ?

Donné numérique : $\dfrac{\ln(2)}{\ln(1.03)} \simeq 23,45$.

3. En 2015, une entreprise compte 4000 employés. Une étude montre que d'une année sur l'autre, 10% de l'effectif part à la retraite. Pour tenter de compenser la perte, l'entreprise embauche 200 jeunes chaque année.

   On note w_n le nombre d'employés l'année $2015 + n$ avec $w_0 = 4000$.

   (a) Montrer que $w_{n+1} = \dfrac{9}{10} w_n + 200$.

   (b) Calculer w_1 et w_2.

   (c) On pose $t_n = w_n - 2000$. Montrer que (t_n) est géométrique.

   (d) Exprimer t_n puis w_n en fonction de n.

   (e) Donner le sens de variation de (w_n) ainsi que sa limite.