Chapitre 9

Couples de variables aléatoires discrètes

Compétences attendues.

✓ Obtenir la loi d'un couple de variables aléatoires discrètes.

✓ Déterminer les lois marginales à partir de la loi d'un couple de variables aléatoires discrètes.

✓ Déterminer les lois conditionnelles d'un couple de variables aléatoires discrètes.

✓ Déterminer les lois marginales à partir des lois conditionnelles d'un couple de variables aléatoires discrètes.

✓ Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes.

✓ Étudier l'indépendance de variables aléatoires discrètes.

✓ Déterminer la loi de la somme de variables aléatoires discrètes.

✓ Connaître la stabilité par somme des lois binomiales et des lois de Poisson.

✓ Déterminer les lois du minimum et du maximum de variables aléatoires discrètes.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECG au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

Dans ce chapitre, les variables aléatoires sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

On considère X et Y deux variables aléatoires discrètes dont on fixera une numérotation de leurs supports (avec $I = [\![1, n]\!]$ ou $\mathbb{N}$ et $J = [\![1, m]\!]$ ou $\mathbb{N}$ selon que X et Y soient finies ou non) :

$$X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\} \qquad \text{et} \qquad Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}.$$

1 Couples de variables aléatoires discrètes

1.1 Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes

Définition.

On appelle **loi conjointe de** (X, Y) ou **loi du couple** (X, Y) la donnée de :

- $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$.
- $p_{i,j} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ pour tout $(i, j) \in I \times J$.

Notation. On notera parfois l'événement $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ plus simplement $(X = x_i, Y = y_j)$.

Remarque. Lorsque X et Y sont **finies**, la loi du couple (X, Y) peut être représentée par un tableau à double entrée :

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\dots$	$p_{1,m}$
x_2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	$\dots$	$p_{2,m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_n	$p_{n,1}$	$p_{n,2}$	$\dots$	$p_{n,m}$

Exercice. Considérons l'expérience aléatoire consistant à jeter deux dés, X la variable aléatoire donnant le plus petit résultat et Y le plus grand. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

Propriété 1 (Système complet d'événements associé à un couple)

(1) La famille $((X = x_i) \cap (Y = y_j))_{(i,j)\in I\times J}$ est un système complet d'événements.

(2) En particulier, $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{(i,j)\in I\times J} p_{i,j} = 1.$

Remarque. Lorsque la loi d'un couple (X, Y) est représentée par un tableau, la somme de toutes les probabilités du tableau vaut 1.

Exercice. Soient $a \in \mathbb{R}$ et X, Y deux variables aléatoires discrètes toutes les deux à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{a}{2^{i+1} j!}.$$

Déterminer a.

Propriété 2 (Caractérisation d'une loi conjointe de probabilité)

Soient I et J des ensembles finis ou dénombrables, et soit $(p_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels satisfaisant :

- $\forall (i,j) \in I \times J$, $p_{i,j} \geq 0$.
- $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} p_{i,j} = 1.$

Alors la famille $(p_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ définit une **loi conjointe de probabilité**, c'est-à-dire qu'il existe un couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ tel que :

$$X(\Omega) \times Y(\Omega) = I \times J \qquad \text{et} \qquad \forall (i,j) \in I \times J,\ P((X = i) \cap (Y = j)) = p_{i,j}.$$

1.2 Lois marginales

Définition.

On appelle **lois marginales du couple** (X,Y) les lois de X et de Y.

Méthode.

Pour obtenir la loi marginale de Y à partir de la loi du couple (X,Y), on applique la formule des probabilités totales :

- *On décompose l'événement $(Y=y_j)$ sur le système complet d'événements $(X=x_i)_{i\in I}$:*

$$(Y=y_j)=\bigcup_{i\in I}((X=x_i)\cap(Y=y_j)).$$

- *Par incompatibilité de l'union :*

$$P(Y=y_j)=P\left(\bigcup_{i\in I}((X=x_i)\cap(Y=y_j))\right)=\sum_{i\in I}P((X=x_i)\cap(Y=y_j)).$$

  On fait ainsi apparaitre la loi du couple (X,Y) dont on connait la valeur.

On appliquerait la même méthode pour obtenir la loi marginale de X.

Remarque. Lorsque X et Y sont **finies** et que la loi du couple (X,Y) est représentée par un tableau, on obtient $P(X=x_i)$ en sommant les termes de la i-ième ligne et $P(Y=y_j)$ en sommant les termes de la j-ième colonne :

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m	Loi de X
x_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\dots$	$p_{1,m}$	$P(X=x_1)=\sum_{j=1}^{m}p_{1,j}$
x_2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	$\dots$	$p_{2,m}$	$P(X=x_2)=\sum_{j=1}^{m}p_{2,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	$p_{n,1}$	$p_{n,2}$	$\dots$	$p_{n,m}$	$P(X=x_n)=\sum_{j=1}^{m}p_{n,j}$
Loi de Y	$P(Y=y_1)=\sum_{i=1}^{n}p_{i,1}$	$P(Y=y_2)=\sum_{i=1}^{n}p_{i,2}$	$\dots$	$P(Y=y_m)=\sum_{i=1}^{n}p_{i,m}$	Somme totale $=1$

Exercice. Considérons l'expérience aléatoire consistant à jeter deux dés, X la variable aléatoire donnant le plus petit résultat et Y le plus grand. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y).

Exercice. Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes toutes les deux à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{e^{-1}}{2^{i+1}j!}.$$

Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).

1.3 Lois conditionnelles

Définition.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes, et soit $i \in I$ tel que $P(X = x_i) \neq 0$.
On appelle **loi conditionnelle de Y sachant $(X = x_i)$** la donnée :

- des valeurs y_j prises par Y sachant $(X = x_i)$;
- des probabilités $P_{(X=x_i)}(Y = y_j)$ pour chacune de ces valeurs y_j.

On définit de même la **loi conditionnelle de X sachant $(Y = y_j)$**.

Méthode.

Pour obtenir la loi marginale de Y à partir de la loi de X et de la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x_i)$, on applique la formule des probabilités totales :

- *On décompose l'événement $(Y = y_j)$ sur le système complet d'événements $(X = x_i)_{i\in I}$:*

$$(Y = y_j) = \bigcup_{i\in I}((X = x_i)\cap(Y = y_j)).$$

- *Par incompatibilité de l'union :*

$$P(Y = y_j) = P\left(\bigcup_{i\in I}((X = x_i)\cap(Y = y_j))\right) = \sum_{i\in I} P((X = x_i)\cap(Y = y_j)).$$

- *Avec la formule des probabilités composées :*

$$P(Y = y_j) = \sum_{i\in I} P(X = x_i)P_{(X=x_i)}(Y = y_j).$$

  On fait ainsi apparaitre la loi de X et la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x_i)$ dont on connait les valeurs.

On appliquerait la même méthode pour obtenir la loi marginale de X à partir de la loi de Y et de la loi conditionnelle de X sachant $(Y = y_j)$.

Exercice. On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres.
La probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à $p \in]0, 1[$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(N = n)$.

2. En déduire la loi marginale de X.

1.4 Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

Définition.

Les variables aléatoires discrètes X et Y sont **indépendantes** si :

$$\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i)P(Y = y_j),$$

c'est-à-dire que les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont **indépendants**.

Propriété 3 (Indépendance de deux variables aléatoires discrètes)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes **indépendantes**.

(1) Si I_1 et I_2 sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, alors

$$P((X \in I_1) \cap (Y \in I_2)) = P(X \in I_1)P(Y \in I_2).$$

(2) Si f_1 et f_2 sont deux fonctions, alors $f_1(X)$ et $f_2(Y)$ sont deux variables aléatoires discrètes **indépendantes**.

Exercice. Considérons l'expérience aléatoire consistant à jeter deux dés, X la variable aléatoire donnant le plus petit résultat et Y le plus grand. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice. Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes toutes les deux à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{e^{-1}}{2^{i+1} j!}.$$

Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

2 Variables aléatoires $g(X, Y)$

Dans toute cette partie, nous allons nous intéresser à la loi d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ définie en fonction des variables X et Y.

2.1 Fonction d'un couple de variables aléatoires discrètes

Propriété 4 (Fonction d'un couple de variables aléatoires discrètes)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes et $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application. L'application Z de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = g(X(\omega), Y(\omega))$$

est une variable aléatoire discrète, notée $g(X, Y)$.

Exemples. $X + Y$, XY, $\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$ sont des variables aléatoires discrètes.

Propriété 5 (Loi de $g(X, Y)$)

On note $Z = g(X, Y)$. Pour tout $z_k \in Z(\Omega)$, on a :

$$P(Z = z_k) = \sum_{\substack{(i,j)\in I\times J \\ g(x_i,y_j)=z_k}} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Méthode.

Pour déterminer la loi de $Z = g(X, Y)$:

- *On détermine son support $Z(\Omega)$ à l'aide de $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.*
- *Pour calculer $P(Z = z_k)$ où $z_k \in Z(\Omega)$ fixé, on se ramène à la loi du couple (X, Y) en décomposant l'événement $(Z = z_k)$ sur le système complet d'événements $(X = x_i)_{i\in I}$ associé à X ou $(Y = y_j)_{j\in J}$ associé à Y.*

Exercice. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$, avec $p, q \in]0, 1[$. Déterminer la loi de $Z = XY$.

Remarques.

1. On se limitera presque toujours au calcul de la loi d'une somme $Z = X + Y$ ou d'un produit $Z = XY$.
2. On utilisera également cette méthode lorsqu'on doit déterminer la probabilité d'un événement faisant intervenir deux variables aléatoires, par exemple $P(X = Y)$, $P(X \leq Y)$...

2.2 Somme de deux variables aléatoires

Propriété 6 (Stabilité par somme des lois de Poisson)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On suppose que :

- X et Y sont indépendantes,
- $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$.

Alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Preuve.

□

Lemme. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in [\![0, n+m]\!]$, on a :

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k} \qquad \textit{(formule de Vandermonde).}$$

Preuve.

□

Propriété 7 (Stabilité par somme des lois binomiales)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On suppose que :

- X et Y sont indépendantes,
- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$.

Alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$.

Preuve.

□

Remarque. Ce résultat s'explique facilement : sommer X et Y revient à compter le nombre de succès au cours de $n+m$ épreuves de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès p puisqu'on ajoute le nombre de succès sur les n premières épreuves (c'est-à-dire X) et le nombre de succès sur les m épreuves suivantes (c'est-à-dire Y).

2.3 Maximum et minimum de deux variables aléatoires

Loi du maximum

Méthode.

*Pour déterminer la loi de $Z = \max(X, Y)$ dans le cas où X et Y sont **indépendantes** à valeurs dans $\mathbb{N}$:*

- *On exprime l'événement $(Z \leq k)$ pour $k \in Z(\Omega)$ fixé à l'aide de X et Y :*

$$(Z \leq k) = (\max(X, Y) \leq k) = (X \leq k) \cap (Y \leq k).$$

- *Comme X et Y sont indépendantes, on a :*

$$P(Z \leq k) = P((X \leq k) \cap (Y \leq k)) = P(X \leq k) \times P(Y \leq k).$$

- *On en déduit $P(Z = k)$ grâce à la formule :*

$$P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k - 1).$$

Exercice. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant toutes les deux une loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Déterminer la loi de $Z = \max(X, Y)$.

Loi du minimum

Méthode.

Pour déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$ dans le cas où X et Y sont ***indépendantes*** *à valeurs dans $\mathbb{N}$:*

- *On exprime l'événement $(Z \geq k)$ pour $k \in Z(\Omega)$ fixé à l'aide de X et Y :*

$$(Z \geq k) = (\min(X, Y) \geq k) = (X \geq k) \cap (Y \geq k).$$

- *Comme X et Y sont indépendantes, on a :*

$$P(Z \geq k) = P((X \geq k) \cap (Y \geq k)) = P(X \geq k) \times P(Y \geq k).$$

- *On en déduit $P(Z = k)$ grâce à la formule :*

$$P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k + 1).$$

3 Espérance, covariance et corrélation linéaire

3.1 Espérance de $g(X, Y)$

Théorème 8 (de transfert double)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes.
Sous réserve de la convergence absolue de la "série double" suivante, $Z = g(X, Y)$ possède une espérance et on a :

$$E(Z) = E(g(X, Y)) = \sum_{(i,j) \in I \times J} g(x_i, y_j) P((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Remarques.

1. Ce théorème permet de connaître l'espérance de $Z = g(X, Y)$ sans avoir à connaître la loi de Z.
2. Si X et Y sont finies, alors $Z = g(X, Y)$ admet une espérance. En effet, il n'y a pas de problème de convergence absolue dans ce cas puisqu'il s'agit d'une somme double finie.
3. Dans le cas où (au moins) une des deux variables X ou Y est infinie, le caractère licite de l'écriture de la somme ci-dessus est conditionné par la convergence absolue d'une série à double indice et présente donc un problème assez subtil. Les sujets des problèmes de concours faisant intervenir ce type de somme proposent donc un guidage étape par étape pour justifier l'existence d'une telle somme.

Propriété 9 (Linéarité de l'espérance)

Soient X et Y des variables aléatoires admettant une espérance. Alors pour tous réels $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et on a :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

Preuve.

$\square$

Propriété 10 (Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes)

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes **admettant une variance**. Alors XY admet une espérance et on a :

$$E(XY) = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i y_j P((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Propriété 11 (Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes)

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes **indépendantes**. On suppose que X et Y admettent une **espérance**. Alors XY admet une espérance et :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Preuve.

□

3.2 Covariance

Définition.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes **admettant une variance**. On appelle **covariance de X et Y** le réel :

$$Cov(X,Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right).$$

On dit que X et Y sont **non corrélées** si $Cov(X,Y) = 0$.

Remarques.

1. $Cov(X,Y)$ existe bien car $X - E(X)$ et $Y - E(Y)$ admettent toutes deux une variance, et donc leur produit admet une espérance (d'après la propriété 10).
2. La covariance est une mesure de la variation simultanée de deux variables aléatoires. Autrement dit, la covariance est positive si X et Y diffèrent de leur moyenne dans le même sens, et elle est négative si X et Y diffèrent de leur moyenne dans le sens opposé.

Théorème 12 (Formule de Koenig-Huygens)

Si X et Y admettent toutes les deux une variance, alors on a :

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Preuve.

□

Propriété 13 (Covariance avec une variable aléatoire presque sûrement constante)

(1) Si X admet une variance et Y est presque surement constante, alors $Cov(X, Y) = 0$.

(2) En particulier, $Cov(X, a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Preuve.

□

Propriété 14 (de la covariance)

On suppose que X, Y, Z admettent toutes une variance. On a alors :

- *Symétrie* : $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$.
- *Bilinéarité* (c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune des variables) :
  - *linéarité à gauche* : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $Cov(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda Cov(X, Z) + \mu Cov(Y, Z)$;
  - *linéarité à droite* : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $Cov(X, \lambda Y + \mu Z) = \lambda Cov(X, Y) + \mu Cov(X, Z)$.
- *Positivité* : $Cov(X, X) = V(X) \geq 0$.

Preuve.

□

Propriété 15 (Indépendance et covariance)

Soient X et Y admettant toutes les deux une variance.
Si X et Y sont **indépendantes**, alors $Cov(X,Y) = 0$.

Preuve.

□

Remarque. On utilisera aussi la contraposée de cette propriété : si $Cov(X,Y) \neq 0$, alors X et Y ne sont pas indépendantes.

Attention.

La **réciproque est fausse** : on peut avoir $Cov(X,Y) = 0$ avec X et Y non indépendantes.

Théorème 16 (Variance d'une somme)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes admettant chacune une variance.

(1) La variable aléatoire $X+Y$ admet une variance et on a :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y).$$

(2) Dans le cas où X et Y sont **indépendantes**, on a :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

Preuve.

□

Attention.

Même dans le cas de variables indépendantes, il n'y a pas de linéarité de la variance.
Remarquons par exemple que : $V(X-Y) = V(X) + V(-Y) = V(X) + V(Y)$.

Méthode.

Pour calculer une covariance, deux possibilités :

- *Lorsqu'on connaît $E(XY)$ ou qu'on peut le calculer facilement (si X et Y prennent un petit nombre de valeurs par exemple), on applique la formule de Koenig-Huygens :*

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

- *Lorsqu'on ne peut pas calculer facilement $E(XY)$ (car cela fait intervenir une somme double), on applique la formule précédente en isolant $Cov(X,Y)$:*

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{2}\left(V(X+Y) - V(X) - V(Y)\right).$$

3.3 Coefficient de corrélation linéaire

Définition.

On suppose que X et Y admettent une variance non nulle. On appelle **coefficient de corrélation linéaire de** (X,Y) et on note $\rho(X,Y)$ le réel :

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Remarque. Le coefficient de corrélation linéaire est la normalisation de la covariance par le produit des écarts types. L'intérêt est que X et Y ne s'expriment pas forcément dans la même unité (par exemple si X représente la température extérieure et Y la facture de chauffage). Cette normalisation permet d'obtenir un réel indépendant des unités de mesure des observations.

Propriété 17 (du coefficient de corrélation linéaire)

On suppose que X et Y admettent une variance non nulle. On a :

(1) $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.

(2) $\rho(X, Y) = 1$ si et seulement si il existe $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $Y = aX + b$.

(3) $\rho(X, Y) = -1$ si et seulement si il existe $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $Y = aX + b$.

Remarques.

1. Le coefficient de corrélation linéaire permet donc de mesurer la dépendance **linéaire** qui peut exister entre un couple de variables aléatoires (X, Y) :
   - Si $\rho(X, Y)$ est proche de 1 ou de -1, la dépendance linéaire entre X et Y est importante.
     Exemple : X = nombre de cas de Covid 19, Y = nombre de lits occupés en réanimation.
   - Si $\rho(X, Y)$ est proche de 0, les deux variables sont **linéairement indépendantes**.
     Exemple : X = nombre de participants au Run In Reims, Y = nombre d'étudiants de Clemenceau qui intègrent HEC.

   Attention.

   Ne pas confondre "indépendance linéaire" et "indépendance" : si $\rho(X, Y) = 0$ (et donc $Cov(X, Y) = 0$), alors X et Y sont linéairement indépendantes. Mais elles ne sont pas forcément indépendantes : il peut exister une dépendance non linéaire entre les variables, par exemple $Y = e^X$ ou $Y = \ln(X)$...

2. Le signe de $\rho(X, Y)$ (et de $Cov(X, Y)$) indique le sens d'évolution d'une variable par rapport à l'autre :
   - Si $\rho(X, Y) > 0$, alors les deux variables évoluent en moyenne dans le même sens.
     Exemple : X = température extérieure, Y = consommation de crèmes glacées.
   - Si $\rho(X, Y) < 0$, alors les deux variables évoluent en moyenne en sens inverse.
     Exemple : X = température extérieure, Y = facture de chauffage.

4 Suites de variables aléatoires discrètes

4.1 Fonction de n variables aléatoires discrètes

Propriété 18 (Fonction de n variables aléatoires discrètes)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes et $g : X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application. L'application Z de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = g(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$$

est une variable aléatoire discrète, notée $g(X_1, \ldots, X_n)$.

Exemples. $\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\prod_{i=1}^{n} X_i$, $\max(X_1, \ldots, X_n)$ et $\min(X_1, \ldots, X_n)$ sont des variables aléatoires discrètes.

4.2 Indépendance mutuelle

Définition.

- On dit que n variables aléatoires discrètes $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$, on a :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k = x_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k),$$

  c'est-à-dire que les événements $(X_1 = x_1), \ldots, (X_n = x_n)$ sont **mutuellement indépendants**.

- On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires discrètes **mutuellement indépendantes** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires discrètes $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes**.

Propriété 19 (Indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes)

Soient n variables aléatoires discrètes $X_1, \ldots, X_n$ **mutuellement indépendantes**.

(1) Pour tous intervalles $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$, les événements $(X_1 \in I_1), \ldots, (X_n \in I_n)$ sont **mutuellement indépendants** :

$$P((X_1 \in I_1) \cap \ldots \cap (X_n \in I_n)) = P(X_1 \in I_1) \times \ldots \times P(X_n \in I_n).$$

(2) Si $f_1, \ldots, f_n$ sont n fonctions, alors $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ sont n variables aléatoires discrètes **mutuellement indépendantes**.

(3) *Lemme des coalitions* : Si Y est une variable aléatoire discrète ne dépendant que de $X_1, \ldots, X_p$ et si Z est une variable aléatoire discrète ne dépendant que de $X_{p+1}, \ldots, X_n$, alors Y et Z sont **indépendantes**.

Exemple. Si X_1, X_2, X_3 sont mutuellement indépendantes, alors $X_1 + X_2$ et e^{X_3} sont indépendantes par le lemme des coalitions.

4.3 Espérance et variance

Propriété 20 (Espérance d'une somme de n variables aléatoires discrètes)

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes admettant toutes une espérance, alors $X_1 + \ldots + X_n$ admet une espérance, et on a :

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i).$$

Preuve. Par récurrence sur n. Laissée en exercice. □

Propriété 21 (Variance d'une somme de n variables aléatoires discrètes indépendantes)

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes **mutuellement indépendantes** admettant toutes une variance, alors $X_1 + \ldots + X_n$ admet une variance, et on a :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i).$$

Preuve. Par récurrence sur n. Laissée en exercice. □

Attention.

Si $X_1, \ldots, X_n$ ne sont pas mutuellement indépendantes, cette formule est fausse ! Dans le cas général, la formule est :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov(X_i, X_j).$$

4.4 Somme de n variables aléatoires discrètes

Propriété 22 (Stabilité par somme des lois de Poisson)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. On suppose que :

- $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes,
- pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Preuve.

□

Propriété 23 (Stabilité par somme des lois binomiales)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. On suppose que :

- $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes,
- pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n_i, p)$.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right)$.

Preuve. Par récurrence sur n. Laissée en exercice. □

Remarque. Comme conséquence importante, on a le résultat suivant (en notant que $\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1,p)$) :

On suppose que :

- $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes,
- pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

On justifie ici ce qu'on utilise déjà depuis longtemps, à savoir qu'une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est le nombre de succès lors d'une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.

Remarque. Si on connait l'espérance et la variance d'une loi de Bernoulli (respectivement p et $p(1-p)$) alors on retrouve ici sans calcul celles d'une loi binomiale.
En effet, si $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, alors $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et on a :

$$E(X) \overset{\text{lin. de } E}{=} E(X_1) + \ldots + E(X_n) = np,$$

$$V(X) \overset{\text{indép. des } X_i}{=} V(X_1) + \ldots + V(X_n) = np(1-p).$$

4.5 Maximum et minimum de n variables aléatoires

Méthode.

Pour déterminer la loi de $Z = \max(X_1, \ldots, X_n)$ dans le cas où $X_1, \ldots, X_n$ sont ***mutuellement indépendantes*** *à valeurs dans $\mathbb{N}$:*

- *On exprime l'événement $(Z \leq k)$ pour $k \in Z(\Omega)$ fixé à l'aide de $X_1, \ldots, X_n$:*

$$(Z \leq k) = (\max(X_1, \ldots, X_n) \leq k) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leq k).$$

- *Comme $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, on a :*

$$P(Z \leq k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leq k)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq k).$$

- *On en déduit $P(Z = k)$ grâce à la formule :*

$$P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k-1).$$

Exercice. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes suivant toutes une loi uniforme $\mathcal{U}([\![1,N]\!])$. Déterminer la loi de $Z = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

Méthode.

Pour déterminer la loi de $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$ *dans le cas où* $X_1, \ldots, X_n$ *sont* ***mutuellement indépendantes*** *à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *:*

- *On exprime l'événement* $(Z \geq k)$ *pour* $k \in Z(\Omega)$ *fixé à l'aide de* $X_1, \ldots, X_n$ *:*

$$(Z \geq k) = (\min(X_1, \ldots, X_n) \geq k) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \geq k).$$

- *Comme* $X_1, \ldots, X_n$ *sont mutuellement indépendantes, on a :*

$$P(Z \geq k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \geq k)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq k).$$

- *On en déduit* $P(Z = k)$ *grâce à la formule :*

$$P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k+1).$$

Exercice. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes suivant toutes une loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$. Déterminer la loi de $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$.