Colle 1

Révisions de première année
Compléments sur les suites

Questions de cours

1. Coefficients binomiaux : Définition, propriétés et formule du binôme de Newton.
2. Théorèmes des suites monotones et des suites adjacentes.
3. Preuve : Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors

$$e^{u_n} - 1 \sim u_n, \quad \ln(1+u_n) \sim u_n, \quad (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n.$$

Exercice 1

Déterminer un équivalent simple puis la limite des suites :

$$u_n = (n + 3\ln(n))e^{-n-1}, \qquad v_n = \frac{n^3(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^3+1}}, \qquad w_n = \ln(2 - e^{-1/n}).$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Vérifier que f est impaire.
3. Étudier les variations de f.
4. En déduire que f est une bijection de $\mathcal{D}_f$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 3

Calculer les sommes suivantes :

$$(1)\ \sum_{k=n}^{2n} k^2 \qquad (2)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k\binom{n}{k}}{k+1} \qquad (3)\ \sum_{0\leq i,j\leq n} 2^{i+j}$$

Exercice 4

Pour tout entier $n \geq 3$, on pose $f_n(x) = x^n + x^2 + 2x - 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution positive x_n. Vérifier que $x_n \in [0, \frac{1}{2}]$.
2. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

   En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq 3}$.
3. En déduire qu'elle converge vers une limite qu'on notera ℓ.
4. En utilisant la question 1., montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n^n = 0$.
5. En utilisant la relation $f_n(x_n) = 0$, en déduire la valeur de ℓ.

Colle 1

Révisions de première année
Compléments sur les suites

Questions de cours

1. Fonctions logarithme et exponentielle : Définition, propriétés et représentation graphique.
2. Suites arithmétiques et géométriques : Définition et formules explicites.
3. Preuve : Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) quatre suites telles que $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$. Alors :

$$u_n v_n \sim w_n t_n, \quad \frac{u_n}{v_n} \sim \frac{w_n}{t_n}, \quad u_n^k \sim w_n^k \text{ (où } k \in \mathbb{N}).$$

Exercice 5

Déterminer un équivalent simple puis la limite des suites :

$$u_n = \frac{n^2(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^2+1}}, \qquad v_n = n^2 \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right), \qquad w_n = n^{1/n} - 1.$$

Exercice 6

Calculer les sommes suivantes :

$$(1)\ \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} \qquad (2)\ \sum_{k=0}^{n} (n-k)\binom{n}{k} \qquad (3)\ \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$$

Exercice 7

Déterminer l'ensemble de définition, de continuité, de dérivabilité, les limites et la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}} \qquad g(x) = \ln(2 - \sqrt{x}) \qquad h(x) = (x+1)^x$$

Exercice 8

On considère les deux suites (x_n) et (y_n) définies par :

$$x_0 = 1,\ y_0 = 9 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = 6x_n - y_n \\ y_{n+1} = 5x_n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (x_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
2. En déduire une expression de x_n, puis de y_n, en fonction de n.

Exercice 9

1. Montrer que l'équation $xe^x = n$ admet une unique solution réelle pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notée u_n.
2. Étudier les variations et la convergence de (u_n).
3. Montrer que $u_n \sim \ln(n)$.
4. Déterminer un équivalent simple de $\ln(n) - u_n$.

Colle 1

Révisions de première année
Compléments sur les suites

Questions de cours

1. Fonctions partie entière et valeur absolue : Définitions, propriétés et représentation graphique.
2. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : Définition et formules explicites.
3. Preuve : Si deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, alors elles sont de même nature :
   - Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) converge vers un réel ℓ, alors (u_n) converge également vers ℓ.
   - Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) diverge vers $\pm\infty$, alors (u_n) diverge également vers $\pm\infty$.

Exercice 10

Déterminer un équivalent simple puis la limite des suites :

$$u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1}, \qquad v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}, \qquad w_n = n(\sqrt[n]{3} - 1).$$

Exercice 11

Calculer les sommes suivantes :

$$(1) \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \qquad (2) \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \qquad (3) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$$

Exercice 12

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ est une suite arithmético-géométrique.
2. En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 13

Déterminer l'ensemble de définition, de continuité, de dérivabilité, les limites et la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x)} \qquad g(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 2}{x+1}\right) \qquad h(x) = e^{1/x}$$

Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$.

1. Vérifier que la suite (u_n) est bien définie.
2. Étudier la convergence de la suite (u_n).
3. Montrer que $u_n \sim \sqrt{n}$.

Colle 1

Révisions de première année
Compléments sur les suites

Questions de cours

1. Coefficients binomiaux : Définition, propriétés et formule du binôme de Newton.
2. Théorèmes des suites monotones et des suites adjacentes.
3. Preuve : Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors

$$e^{u_n} - 1 \sim u_n, \quad \ln(1+u_n) \sim u_n, \quad (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n.$$

Exercice 15

Déterminer un équivalent simple puis la limite des suites :

$$u_n = (n + 3\ln(n))e^{-n-1}, \qquad v_n = \frac{n^3(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^3+1}}, \qquad w_n = \ln(2 - e^{-1/n}).$$

Exercice 16

Calculer les sommes suivantes :

$$(1)\ \sum_{k=n}^{2n} k^2 \qquad (2)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k \binom{n}{k}}{k+1} \qquad (3)\ \sum_{0\leq i,j\leq n} 2^{i+j}$$

Exercice 17

Déterminer l'ensemble de définition, de continuité, de dérivabilité, les limites et la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x} \qquad g(x) = \sqrt{\frac{x^2+4x+3}{x+1}} \qquad h(x) = \frac{1}{(x^2-4)^3}$$

Exercice 18

Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction f_n par $f_n(x) = nx + \ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée x_n.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x_n < 1$.
3. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
4. En déduire la monotonie de la suite et sa convergence vers une limite ℓ.
5. Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.
