Colle 1

Ensemble de nombres et opérations sur les réels

Question de cours

Signe d'un polynôme de degré 1 / de degré 2.

Exercice 1

1. Trouver deux réels a et b tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k} = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 2

Résoudre les équations/inéquations suivantes :

$$(1)\ (x+1)^2 = (x-1)^2 \qquad (2)\ \frac{x+3}{x^2-1} \geq \frac{3}{x-1} \qquad (3)\ |x-3| = \frac{5}{3}$$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes et produits suivants :

$$(1)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}}{5^{k+2}} \qquad (2)\ \prod_{k=1}^{n} \frac{9^k}{2k} \qquad (3)\ \sum_{k=n}^{3n} k^2$$

Exercice 4

Simplifier les expressions suivantes :

$$(1)\ \frac{5+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{5-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}} \qquad (2)\ \frac{(5^2\times 3^3)^2 \times 2^{-2} \times (-3)^{-2}}{(3^2\times 2^4)^3 \times 2^{-3} \times 5} \qquad (3)\ \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

Exercice 5

On pose $A(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} + \dfrac{3}{1-x} + \dfrac{1}{x^2-x}$.

1. Factoriser $A(x)$.

2. Résoudre l'équation $A(x) = 0$.

3. Résoudre l'inéquation $A(x) < 0$.

Exercice 6

Soit n un entier naturel.

1. Montrer que, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $k.k! = (k+1)! - k!$.

2. En déduire la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k.k!$.

Colle 1

Ensemble de nombres et opérations sur les réels

Question de cours

Opérations sur les sommes et sur les produits.

Exercice 7

Calculer la somme $\sum_{k=n}^{2n} k$ et simplifier l'expression obtenue.

Exercice 8

Résoudre les équations/inéquations suivantes :

$$(1)\ \frac{x^2-4}{x^2+2x}=0 \qquad (2)\ \frac{(x-1)^2(x+5)}{x-4}\geq 0 \qquad (3)\ |x+1|-|2x+1|=0$$

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes et produits suivants :

$$(1)\ \sum_{k=0}^{n}\left(k^2-3\times 2^{k-1}\right) \qquad (2)\ \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) \qquad (3)\ \sum_{k=2n}^{3n} k^2$$

Exercice 10

Simplifier les expressions suivantes :

$$(1)\ \left(\frac{7}{5}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{7}{8}-\left(\frac{3}{4}-2\right)\right) \qquad (2)\ 9\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-(3^2\times 2)^4-5\times 2^2 \qquad (3)\ \frac{1+2\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}$$

Exercice 11

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\dfrac{2}{(k-1)(k+1)}=\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k+1}$.
2. En déduire, pour tout entier $n \geq 2$, la valeur de la somme $S_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{(k-1)(k+1)}$.

Exercice 12

Dans cet exercice, on cherche à résoudre l'inéquation suivante :

$$(I) : |2x-1| \leq |x+2|\,.$$

1. Résoudre l'inéquation (I) dans chacun des cas suivants :

   - si $x \in]-\infty,-2]$,
   - si $x \in [-2,\frac{1}{2}]$,
   - si $x \in [\frac{1}{2},+\infty[$.

2. En déduire les solutions de (I).

Colle 1

Ensemble de nombres et opérations sur les réels

Question de cours

Formules sur les sommes usuelles.

Exercice 13

Résoudre l'inéquation $\dfrac{-3x^2+14x+12}{5-x} \geq 2x$.

Exercice 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes et produits suivants :

$$(1)\ \sum_{k=2}^{n}(6k^2-2k+3) \qquad (2)\ \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) \qquad (3)\ \sum_{k=n}^{2n}k^2$$

Exercice 15

Résoudre les équations/inéquations suivantes :

$$(1)\ \frac{2x-5}{6-x}=4 \qquad (2)\ 2x(x+1) \geq (1-3x)(x+1) \qquad (3)\ x-2=\sqrt{x}$$

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}.$$

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2} = \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.
2. En déduire une expression de S_n en fonction de n.

Exercice 17

Simplifier les expressions suivantes :

$$(1)\ \frac{\frac{25}{16}\times\frac{24}{15}+1}{2+\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} \qquad (2)\ \frac{21\times 10^9\times 25\times 10^7}{1200\times(10^{-3})^2} \qquad (3)\ \left(\sqrt{7-\sqrt{6}}+\sqrt{7+\sqrt{6}}\right)^2$$

Exercice 18

Dans cet exercice, on cherche à résoudre l'équation suivante :

$$(E) : |2x+3|-|2-x| = -3.$$

1. Résoudre l'équation (E) dans chacun des cas suivants :

   • si $x \in]-\infty, -\frac{3}{2}]$, • si $x \in [-\frac{3}{2}, 2]$, si $x \in [2, +\infty[$.

2. En déduire les solutions de (E).
