Colle 10

Étude locale de fonctions - Chaînes de Markov

Questions de cours

1. Négligeabilité : définition et propriétés.
2. Preuve : Développements limités usuels au voisinage de 0 :
   - $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$
   - $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$
   - $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$

Exercice 1

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$.

Faire l'étude locale complète de f au voisinage de 0 (on donnera l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage du point d'abscisse 0).

Exercice 2

Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On effectue des tirages successifs avec remise et on définit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :

- Pour tout entier naturel n non nul, X_n est définie après le n-ième tirage.
- On procède au premier tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue.
- Après le n-ième tirage ($n \in \mathbb{N}^*$) : Soit X_n a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(n+1)$-ième tirage et X_{n+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(n+1)$-ième tirage. Soit X_n a pris une valeur j différent de 1, dans ce cas on procède également au $(n+1)$-ième tirage et X_{n+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer le graphe probabiliste et la matrice de transition A associés à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Soit U_n le n-ième état probabiliste. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = U_n A$.
4. Diagonaliser la matrice A.
5. En déduire A^n puis U_n en fonction de n.
6. La chaîne de Markov converge-t-elle vers un état stable ?

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes :

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(x) - x}{x + e^{-x}} \qquad (2)\ \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln(x)}$$

Colle 10

Étude locale de fonctions - Chaînes de Markov

Questions de cours

1. Équivalence : définition et propriétés.

2. Preuve : Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 :

   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0, et ce développement limité est alors nécessairement :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{-x} - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = -1$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, et exprimer $f'(x)$ pour tout x non nul.
   (b) Calculer la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.
   (c) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Un mobile se promène aléatoirement sur les sommets S_1, S_2 et S_3 d'un triangle. A l'instant 0, il se trouve sur le sommet S_1 et la règle de la promenade est la suivante : si, à un instant donné, le mobile se trouve sur un sommet, alors il y reste deux fois sur trois, sinon il choisit de façon équiprobable d'aller sur l'un des deux autres sommets.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet où se trouve le mobile à l'instant n.

1. Justifier que la suite (X_n) définit une chaîne de Markov homogène.

2. Déterminer le graphe probabiliste et la matrice de transition A associés à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Soit U_n le n-ième état probabiliste. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = U_n A$.

4. Diagonaliser la matrice A.

5. En déduire A^n puis U_n en fonction de n.

6. La chaîne de Markov converge-t-elle vers un état stable ?

Exercice 6

Déterminer les limites suivantes :

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}+1}{x-\ln(x)} \qquad (2)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)+x^2}{\ln(x+x^2)} \qquad \lim_{x\to 1^-} \ln(x)\ln(1-x)$$

Colle 10

Étude locale de fonctions - Chaînes de Markov

Questions de cours

1. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.
2. Preuve : Loi d'une chaîne de Markov :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n \times A \quad \text{ce qui donne par récurence} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0 \times A^n.$$

Exercice 7

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{1+x}$.

Faire l'étude locale complète de f au voisinage de 0 (on donnera l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage du point d'abscisse 0).

Exercice 8

On constate que, dans une certaine région, s'il pleut un jour donné, alors il y a une chance sur deux pour qu'il pleuve encore le lendemain ; et s'il ne pleut pas, il ne pleut pas non plus le lendemain trois fois sur quatre. Par un certain jour de pluie, numéroté 0, on décide de noter le temps qu'il fait (s'il pleut ou s'il ne pleut pas). Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale à 1 s'il pleut le n-ième jour qui suit celui où l'on a débuté les observations, et 2 s'il ne pleut pas.

1. Justifier que la suite (X_n) définit une chaîne de Markov homogène.
2. Déterminer le graphe probabiliste et la matrice de transition A associés à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit U_n le n-ième état probabiliste. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = U_n A$.
4. Diagonaliser la matrice A.
5. En déduire A^n puis U_n en fonction de n.
6. La chaîne de Markov converge-t-elle vers un état stable ?

Exercice 9

Déterminer les limites suivantes :

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}+x^2}{x-\ln(x)} \qquad (2)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$$
