Colle 11

Espaces vectoriels

Questions de cours

Preuve : Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E.
Alors $Vect(u_1, \dots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 1

Montrer que l'ensemble

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base et la dimension.

Exercice 2

On considère l'ensemble F défini par :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ \mid \ P(1) = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (X - 1, X^2 - 1)$ est une base de F et donner sa dimension
3. On pose $P(X) = X^2 - 2X + 1$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 3

On considère pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les ensembles suivants:

$$E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = M\} \quad \text{et} \quad E_2(A) = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ A^2M = AM\right\}.$$

1. Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. (a) Établir que $E_1(A) \subset E_2(A)$.
   (b) Montrer que si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.
3. (a) Établir que si $A - I$ est inversible alors $E_1(A) = \{0\}$.
   (b) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Colle 11

Espaces vectoriels

Questions de cours

Preuve : Si une famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_n)$ est une base de E, alors tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de $(e_1, \dots e_n)$, c'est-à-dire :

$$\forall u \in E,\ \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ u = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n.$$

Exercice 4

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on donne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (A, B, C, D)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de M dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 5

On considère l'ensemble F défini par :

$$F = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X]\ ,\ 2P(1-X) = XP'(X)\right\}.$$

1. Montrer que c'est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base de F puis sa dimension.

Exercice 6

Soit E l'ensemble des matrices $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où (a, b) prend toute valeur de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel de dimension 2.
2. Calculer le produit $M_{a,b} \times M_{a',b'}$ pour $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$. Vérifier que ce produit appartient à E.
3. Calculer $(M_{a,b})^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Colle 11

Espaces vectoriels

Questions de cours

1. Caractérisation des sous-espaces vectoriels.
2. Définitions d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base d'un espace vectoriel E.
3. Définition et propriétés des matrices de passages.

Exercice 7

1. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants : $\vec{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1, 1)$, $\vec{v}_3 = (-1, 1, 0, 2)$ et $\vec{v}_4 = (1, -1, 2, 0)$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Déterminer les coordonnées de $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$ dans cette base.
2. Soient les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, -1, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, 1, -1, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, 2, 1, -1)$ et $\vec{u}_4 = (4, 2, 2, 1)$.
   (a) Vérifier que $\vec{u}_4 \in Vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.
   (b) Quel est le rang de la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$?

Exercice 8

On considère l'ensemble F défini par :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ | \ P(1) = P'(1) = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de F puis sa dimension.

Exercice 9

Soit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $C(D) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ DM = MD\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de $C(D)$.
3. Montrer que P est inversible et que $PDP^{-1} = A$.
4. On note $C(A) = \{N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ AN = NA\}$. Montrer que : $N \in C(A) \Leftrightarrow P^{-1}NP \in C(D)$.
5. En déduire une base et la dimension de $C(A)$.
