Colle 12

Espaces vectoriels
Couples de variables aléatoires discrètes

Questions de cours

1. Définition et propriétés des matrices de passage.
2. Preuve : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre $p \in]0,1[$, indépendantes.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (S, D), avec $S = X + Y$ et $D = X - Y$.
2. Déterminer les lois marginales du couple (S, D). Calculer $E(S)$ et $E(D)$.
3. Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes?

Exercice 2

On considère l'ensemble F défini par :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de F puis sa dimension.

Exercice 3

Un péage comporte m guichets. On suppose que le nombre N de voitures arrivant en 1 heure suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
On suppose, de plus, que les conducteurs choisissent leur poste au hasard, et que ces choix sont indépendants.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures passant par le poste numéro un.

1. Déterminer, pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, $P_{(N=n)}(X = k)$.
2. En déduire la loi de probabilité de X.
3. Donner sans calcul les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 4

On considère pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les ensembles suivants:

$$E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = M\} \quad \text{et} \quad E_2(A) = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ A^2M = AM\right\}.$$

1. Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. (a) Établir que $E_1(A) \subset E_2(A)$.
   (b) Montrer que si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.
3. (a) Établir que si $A - I$ est inversible alors $E_1(A) = \{0\}$.
   (b) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Colle 12

Espaces vectoriels
Couples de variables aléatoires discrètes

Questions de cours

1. Définition et caractérisation d'une base d'un espace vectoriel.
   Bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathbb{R}_n[X]$.
2. Preuve : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$. Déterminer la loi de $Z = \max(X, Y)$.

Exercice 5

On considère une urne contenant 2 boules noires et 2 boules blanches, toutes indiscernables.
Un joueur A effectue des tirages successifs d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
Il laisse alors la place au joueur B qui effectue des tirages successifs d'une boule **avec remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées par A avant de tirer une boule blanche et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées par B avant de tirer une boule blanche (s'il ne reste plus de boule noire, on a donc $Y = 0$).
On notera pour chaque entier naturel k non nul les événements suivants :
B_k : "Lors du k-ième tirage, on a extrait une boule blanche de l'urne".
N_k : "Lors du k-ième tirage, on a extrait une boule noire de l'urne".

1. Déterminer la loi de X, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Montrer que $P(Y = 0) = \dfrac{1}{2}$.
3. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P_{(X=0)}(Y = i)$, $P_{(X=1)}(Y = i)$ et $P_{(X=2)}(Y = i)$.
4. En déduire que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$: $P(Y = i) = \dfrac{1}{6}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^i + \left(\dfrac{1}{2}\right)^i\right)$.
5. Vérifier que : $\displaystyle\sum_{i \in Y(\Omega)} P(Y = i) = 1$.
6. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 6

Soit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $C(D) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ DM = MD\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de $C(D)$.
3. Montrer que P est inversible et que $PDP^{-1} = A$.
4. On note $C(A) = \{N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ AN = NA\}$. Montrer que : $N \in C(A) \Leftrightarrow P^{-1}NP \in C(D)$.
5. En déduire une base et la dimension de $C(A)$.

Colle 12

Espaces vectoriels
Couples de variables aléatoires discrètes

Questions de cours

1. Définitions d'une famille libre et d'une famille génératrice d'un espace vectoriel E.
2. Preuve : Si X, Y, Z admettent toutes une variance alors :
   (a) $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
   (b) *Symétrie* : $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$.
   Bilinéarité (c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune des variables) :
   - *linéarité à gauche* : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $Cov(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda Cov(X, Z) + \mu Cov(Y, Z)$;
   - *linéarité à droite* : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $Cov(X, \lambda Y + \mu Z) = \lambda Cov(X, Y) + \mu Cov(X, Z)$.

Exercice 7

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par piocher des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne). On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise. On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

1. Reconnaître la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance et sa variance.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(N=n)}(X = k)$.
3. Vérifier : $P(X = 0) = \dfrac{4}{9}$.
4. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \dfrac{25}{36}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$.

   On admet que l'égalité $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ *est valable pour* $x \in]-1, 1[$ *et* $k \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.

Exercice 8

On considère l'ensemble F défini par :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (X - 1, X^2 - 1)$ est une base de F et donner sa dimension
3. On pose $P(X) = X^2 - 2X + 1$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$.
