Colle 13

Couples de variables aléatoires discrètes

Questions de cours

1. Covariance : définition et propriétés.
2. Preuve : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 1

1. Dans cette question, x désigne un réel élément de $[0, 1[$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, x]$, simplifier $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

   (b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$.

   (c) Montrer que : $\displaystyle 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$.

   (d) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

   (e) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$.

2. Dans cette question, on considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p (avec $0 < p < 1$). On pose $q = 1 - p$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

   On considère alors une variable aléatoire N, définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et dont la loi est donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(N = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   On pose alors $Z = max(X_0, X_1, \ldots, X_N)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = max(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

   On admet que Z et Z_n sont des variables aléatoires définies aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   (b) i. Montrer que, pour tout couple $(i, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $P(X_i \leq k) = 1 - q^k$.

   ii. En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z_n \leq k) = (1 - q^k)^{n+1}$.

   (c) i. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z \leq k) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-q^k)^{n+1}}{n(n+1)}$.

   ii. En déduire une expression de $P(Z \leq k)$ en fonction de k.

   iii. En déduire l'expression de $P(Z = k)$ en fonction de k.

   (d) i. Vérifier que la variable aléatoire N ne possède pas d'espérance.

   ii. Montrer que Z possède une espérance et la calculer.

Colle 13

Couples de variables aléatoires discrètes

Questions de cours

1. Formule de la variance d'une somme de variables aléatoires.
2. Preuve : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$. Déterminer la loi de $Z = \max(X, Y)$.

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre $p \in]0, 1[$, indépendantes.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (S, D), avec $S = X + Y$ et $D = X - Y$.
2. Déterminer les lois marginales du couple (S, D). Calculer $E(S)$ et $E(D)$.
3. Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes?
4. Calculer $cov(S, D)$.

Exercice 3

On considère une urne contenant 2 boules noires et 2 boules blanches, toutes indiscernables.
Un joueur A effectue des tirages successifs d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
Il laisse alors la place au joueur B qui effectue des tirages successifs d'une boule **avec remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées par A avant de tirer une boule blanche et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées par B avant de tirer une boule blanche (s'il ne reste plus de boule noire, on a donc $Y = 0$).
On notera pour chaque entier naturel k non nul les événements suivants :
B_k : "Lors du k-ième tirage, on a extrait une boule blanche de l'urne".
N_k : "Lors du k-ième tirage, on a extrait une boule noire de l'urne".

1. Déterminer la loi de X, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Montrer que $P(Y = 0) = \dfrac{1}{2}$.
3. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P_{(X=0)}(Y = i)$, $P_{(X=1)}(Y = i)$ et $P_{(X=2)}(Y = i)$.
4. En déduire que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$: $P\left(Y = i\right) = \dfrac{1}{6}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^i + \left(\dfrac{1}{2}\right)^i\right)$.
5. Vérifier que : $\displaystyle\sum_{i \in Y(\Omega)} P(Y = i) = 1$.
6. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Colle 13

Couples de variables aléatoires discrètes

Questions de cours

1. Stabilité par somme des lois de Poisson et des lois binomiales.
2. Preuve : Si X, Y, Z admettent toutes une variance alors :
   (a) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
   (b) *Symétrie* : $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$.
   Bilinéarité (c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune des variables) :
   - *linéarité à gauche* : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $Cov(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda Cov(X,Z) + \mu Cov(Y,Z)$;
   - *linéarité à droite* : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $Cov(X, \lambda Y + \mu Z) = \lambda Cov(X,Y) + \mu Cov(X,Z)$.

Exercice 4

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par piocher des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne). On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise. On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

1. Reconnaître la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance et sa variance.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(N=n)}(X = k)$.
3. Vérifier : $P(X = 0) = \dfrac{4}{9}$.
4. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \dfrac{25}{36}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$.

   On admet que l'égalité $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ *est valable pour* $x \in]-1, 1[$ *et* $k \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.

Exercice 5

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. On en tire deux successivement avec remise, et on note X (respectivement Y) le plus grand (respectivement le plus petit) des numéros tirés.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
4. Calculer $cov(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes?
