Colle 14

Couples de variables aléatoires discrètes
Intégration

Questions de cours

1. Formule de la variance d'une somme de variables aléatoires.
2. Preuve : Théorèmes d'intégration par parties et de changement de variable.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln(n^{1/3} A_n).$$

1. Montrer que les suites (A_n) et (v_n) sont bien définies.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que $A_n = A_{n+1} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}} dx$.
   (b) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer A_{n+1} en fonction de A_n.
3. (a) Déterminer trois réels a, b, c tels que lorsque n tend vers $+\infty$,
   $$v_{n+1} - v_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   (b) Étudier la convergence de la suite (v_n).
4. La série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} A_n$ converge-t-elle ?
5. On pose $b_k = \dfrac{A_k}{A_1}$.

   Écrire un programme Python qui pour une valeur de A réelle donnée par l'utilisateur renvoie une valeur de N pour laquelle on a :
   $$\forall n \geq N, \quad \sum_{k=1}^{n} b_k \geq A.$$

Exercice 2

Soit a et b deux réels non nuls.
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X(\Omega) = \{0, a\}$ et $Y(\Omega) = \{0, b\}$.

1. Montrer que X, Y et XY admettent une espérance et déterminer ces espérances.
2. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $Cov(X, Y) = 0$.

Colle 14

Couples de variables aléatoires discrètes
Intégration

Questions de cours

1. Stabilité par somme des lois de Poisson et des lois binomiales.
2. Preuve : Si X, Y, Z admettent toutes une variance alors :
   (a) $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
   (b) *Symétrie* : $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$.
   Bilinéarité (c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune des variables) :
   - *linéarité à gauche* : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $Cov(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda Cov(X, Z) + \mu Cov(Y, Z)$;
   - *linéarité à droite* : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $Cov(X, \lambda Y + \mu Z) = \lambda Cov(X, Y) + \mu Cov(X, Z)$.

Exercice 3

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et k un entier naturel inférieur ou égal à n.
Sur le segment $[0, 1]$, on place au hasard n points, on les ordonne dans l'ordre croissant et, pour n fixé, on appelle X_k la variable aléatoire égale à l'abscisse du k-ième point.
On définit pour $x \in]0, 1[$, Y_x le nombre de points qui ont été placés dans le segment $[0; x]$.

1. Déterminer la loi de Y_x pour $x \in]0; 1[$.
2. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. On pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall q \in \mathbb{N}, \quad I_{p,q} = \frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}.$$
   En déduire l'expression de $I_{p,q}$.
3. Soit $k \in [\![1; n]\!]$ fixé.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X_k (on pourra laisser l'expression sous la forme d'une somme).
   (b) Montrer que X_k est une variable à densité dont une densité f est donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} k\dbinom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k} & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
4. Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k.
   On admet que la variance de X_k est donnée par
$$V(X_k) = \frac{k(n+1-k)}{(n+1)^2(n+2)}$$
5. (a) k étant toujours un entier naturel non nul fixé, on définit pour tout n entier vérifiant $n \geq k$, la variable aléatoire Z_n par $Z_n = X_k$. Montrer l'inclusion d'événements suivante :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \left[|Z_n| > \varepsilon\right] \subset \left[(|Z_n - E(Z_n)| + |E(Z_n)|) > \varepsilon\right]$$
   Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On admet que, comme $\lim\limits_{n\to\infty} E(Z_n) = 0$, on a pour n assez grand
$$|E(Z_n)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et donc } \varepsilon - |E(Z_n)| > \frac{\varepsilon}{2}.$$
   (b) Montrer que pour n assez grand, $P(|Z_n| > \varepsilon) \leq \dfrac{4V(Z_n)}{\varepsilon^2}$.

Colle 14

Couples de variables aléatoires discrètes
Intégration

Questions de cours

1. Covariance : définition et propriétés.
2. Preuve : Propriétés de l'intégrale sur un segment.

Exercice 4

1. Dans cette question, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0,x]$, simplifier $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

   (b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$.

   (c) Montrer que : $\displaystyle 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$.

   (d) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

   (e) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$.

2. Dans cette question, on considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p (avec $0 < p < 1$). On pose $q = 1-p$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

   On considère alors une variable aléatoire N, définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et dont la loi est donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(N=n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   On pose alors $Z = max(X_0, X_1, \ldots, X_N)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = max(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

   On admet que Z et Z_n sont des variables aléatoires définies aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   (b) i. Montrer que, pour tout couple $(i,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $P(X_i \leq k) = 1 - q^k$.

   ii. En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z_n \leq k) = (1-q^k)^{n+1}$.

   (c) i. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z \leq k) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-q^k)^{n+1}}{n(n+1)}$.

   ii. En déduire une expression de $P(Z \leq k)$ en fonction de k.

   iii. En déduire l'expression de $P(Z = k)$ en fonction de k.

   (d) i. Vérifier que la variable aléatoire N ne possède pas d'espérance.

   ii. Montrer que Z possède une espérance et la calculer.

Colle 14

Couples de variables aléatoires discrètes
Intégration

Questions de cours

1. Stabilité par somme des lois de Poisson et des lois binomiales.
2. Preuve : Si X, Y, Z admettent toutes une variance alors :
   (a) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
   (b) *Symétrie* : $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$.
   Bilinéarité (c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune des variables) :
   - *linéarité à gauche* : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $Cov(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda Cov(X,Z) + \mu Cov(Y,Z)$;
   - *linéarité à droite* : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $Cov(X, \lambda Y + \mu Z) = \lambda Cov(X,Y) + \mu Cov(X,Z)$.

Exercice 5

On considère une urne contenant 2 boules noires et 2 boules blanches, toutes indiscernables.
Un joueur A effectue des tirages successifs d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
Il laisse alors la place au joueur B qui effectue des tirages successifs d'une boule **avec remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées par A avant de tirer une boule blanche et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées par B avant de tirer une boule blanche (s'il ne reste plus de boule noire, on a donc $Y = 0$).
On notera pour chaque entier naturel k non nul les événements suivants :
B_k : "Lors du k-ième tirage, on a extrait une boule blanche de l'urne".
N_k : "Lors du k-ième tirage, on a extrait une boule noire de l'urne".

1. Déterminer la loi de X, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Montrer que $P(Y = 0) = \dfrac{1}{2}$.
3. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P_{(X=0)}(Y = i)$, $P_{(X=1)}(Y = i)$ et $P_{(X=2)}(Y = i)$.
4. En déduire que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$: $P(Y = i) = \dfrac{1}{6}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^i + \left(\dfrac{1}{2}\right)^i\right)$.
5. Vérifier que : $\displaystyle\sum_{i \in Y(\Omega)} P(Y = i) = 1$.
6. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 6

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n - \dfrac{1}{n}$.
3. Établir alors un encadrement de S_n, puis montrer que : $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Colle 14

Couples de variables aléatoires discrètes
Intégration

Questions de cours

1. Formule de la variance d'une somme de variables aléatoires.
2. Preuve : Théorèmes d'intégration par parties et de changement de variable.

Exercice 7

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par piocher des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne). On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise. On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

1. Reconnaître la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance et sa variance.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(N=n)}(X = k)$.
3. Vérifier : $P(X = 0) = \dfrac{4}{9}$.
4. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \dfrac{25}{36}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$.

   On admet que l'égalité $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ *est valable pour* $x \in]-1, 1[$ *et* $k \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.

Exercice 8

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1 + x^2)dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^2}dx.$$

1. (a) Calculer J_1.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\geq 1}$.
2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
   $$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+2}.$$
   (b) Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.
   (c) Déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
