

Intégration

Questions de cours

Preuve : L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.

Exercice 1

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$A = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)} dt, \quad B = \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^3}\right) dt, \quad C = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt.$$

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \quad \text{et} \quad v_n = \ln(n^{1/3} A_n).$$

1. Montrer que les suites (A_n) et (v_n) sont bien définies.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Justifier que $A_n = A_{n+1} + \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}} dx$.

(b) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer A_{n+1} en fonction de A_n .

3. (a) Déterminer trois réels a, b, c tels que lorsque n tend vers $+\infty$,

$$v_{n+1} - v_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(b) Étudier la convergence de la suite (v_n) .

4. La série $\sum_{n \geq 1} A_n$ converge-t-elle ?

5. On pose $b_k = \frac{A_k}{A_1}$.

Écrire un programme Python qui pour une valeur de A réelle donnée par l'utilisateur renvoie une valeur de N pour laquelle on a :

$$\forall n \geq N, \quad \sum_{k=1}^n b_k \geq A.$$

Exercice 3

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, $\int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt$.
 - (b) En déduire un encadrement de $\ln(n!)$, puis de u_n , pour tout entier $n \geq 2$.
 - (c) Qu'en déduire pour les suites $(\ln(n!))$ et $(\ln(n^n))$?
-

Intégration

Questions de cours

Preuve : L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 4

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt, \quad B = \int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt, \quad C = \int_3^{+\infty} \frac{dt}{e^t \ln(t)}.$$

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

1. Prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.
 2. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.
 - (a) Prouver que, pour entier naturel n , $I_{n+2} = (n+1)I_n$.
 - (b) On admet que $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Calculer I_1 .
 - (c) Montrer que pour tout entier naturel n : $I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}$ et $I_{2n+1} = 2^n n!$.
-

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}.$$

1. (a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in [0, x], \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^t + 1} \leq \frac{1}{2}$.
 (b) Établir alors que, pour tout $x > 0$, on a : $\frac{1}{e^x + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.
 (c) En déduire que la fonction f est continue à droite en 0.
 2. (a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.
 (b) Vérifier que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\frac{4}{x^3} g(x)$, où g est une fonction que l'on déterminera.
 (c) Étudier les variations, puis le signe de la fonction g .
 En déduire que f est décroissante sur \mathbb{R}^+ .
 3. (a) Montrer que, pour tout $t > 0$, on a : $\frac{t}{e^t + 1} \leq 1$.
 (b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
-

Intégration

Questions de cours

Preuve : Propriétés de l'intégrale sur un segment.

Exercice 7

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$A = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t} \ln(t)} dt, \quad B = \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt, \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt.$$

Exercice 8

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx.$$

1. (a) Calculer J_1 .
- (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.
- (c) Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n \geq 1}$.
2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

- (b) Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.
- (c) Déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 9

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n - \frac{1}{n}$.
3. Établir alors un encadrement de S_n , puis montrer que : $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 10

Soit $x \in]0, 1[$.

1. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$.
2. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.
3. En déduire la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$, ainsi que l'égalité : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.