Colle 15

Intégration

Questions de cours

Preuve : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.

Exercice 1

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$A = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}dt, \qquad B = \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^3}\right)dt, \qquad C = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt.$$

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}dx \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln(n^{1/3}A_n).$$

1. Montrer que les suites (A_n) et (v_n) sont bien définies.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que $A_n = A_{n+1} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}dx$.
   (b) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer A_{n+1} en fonction de A_n.
3. (a) Déterminer trois réels a, b, c tels que lorsque n tend vers $+\infty$,
   $$v_{n+1} - v_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   (b) Étudier la convergence de la suite (v_n).
4. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} A_n$ converge-t-elle ?
5. On pose $b_k = \dfrac{A_k}{A_1}$.

   Écrire un programme Python qui pour une valeur de A réelle donnée par l'utilisateur renvoie une valeur de N pour laquelle on a :
   $$\forall n \geq N, \quad \sum_{k=1}^{n} b_k \geq A.$$

Colle 15

Intégration

Questions de cours

Preuve : L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 3

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt, \qquad B = \int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt, \qquad C = \int_3^{+\infty} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = x^n \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

1. Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.
2. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.
   (a) Prouver que, pour entier naturel n, $I_{n+2} = (n+1)I_n$.
   (b) On admet que $I_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. Calculer I_1.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n : $I_{2n} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$ et $I_{2n+1} = 2^n n!$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt \ \text{ si } \ x > 0 \ \text{ et } \ f(0) = \frac{1}{2}.$$

1. (a) Montrer que : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\forall\, t \in [0,x]$, $\dfrac{1}{e^x+1} \leq \dfrac{1}{e^t+1} \leq \dfrac{1}{2}$.
   (b) Établir alors que, pour tout $x > 0$, on a : $\dfrac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.
   (c) En déduire que la fonction f est continue à droite en 0.
2. (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
   (b) Vérifier que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{4}{x^3}g(x)$, où g est une fonction que l'on déterminera.
   (c) Étudier les variations, puis le signe de la fonction g.
   En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
3. (a) Montrer que, pour tout $t > 0$, on a : $\dfrac{t}{e^t+1} \leq 1$.
   (b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Colle 15

Intégration

Questions de cours

Preuve : Théorèmes d'intégration par parties et de changement de variable.

Exercice 6

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$A = \int_2^{+\infty} \frac{t}{\ln(t)} dt, \qquad B = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}, \qquad C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

Exercice 7

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On définit la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_{x^2}^{x^4} f(t)dt \end{array} \right.$$

1. Pour quelles valeurs du réel x a-t-on $x^2 \leq x^4$?
2. (a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Que vaut $g(1)$?
   (b) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in]0;1]$, $|g(x)| \leq M|x^3 - x|$.
   (c) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. On appelle encore g la fonction prolongée. Préciser la valeur de $g(0)$.
3. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donner $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$.
4. On va maintenant prouver que g est dérivable en 0. On note $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
   (a) Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour F en 0.
   (b) En déduire des équivalents quand x tend vers 0 de $F(x^4)$ et de $F(x^2)$ et conclure.

Exercice 8

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t)dt$.
   (b) En déduire un encadrement de $\ln(n!)$, puis de u_n, pour tout entier $n \geq 2$.
   (c) Qu'en déduire pour les suites $(\ln(n!))$ et $(\ln(n^n))$?

Colle 15

Intégration

Questions de cours

Preuve : Propriétés de l'intégrale sur un segment.

Exercice 9

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$A = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)} dt, \qquad B = \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt, \qquad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt.$$

Exercice 10

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1 + x^2) dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^2} dx.$$

1. (a) Calculer J_1.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n \geq 1}$.
2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
   $$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$
   (b) Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.
   (c) Déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 11

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n - \dfrac{1}{n}$.
3. Établir alors un encadrement de S_n, puis montrer que : $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 12

Soit $x \in]0, 1[$.

1. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\displaystyle\int_0^x \frac{1 - t^n}{1 - t} dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.
2. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt = 0$.
3. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$, ainsi que l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1 - x)$.
