Colle 16

Intégration - Variables aléatoires à densité

Questions de cours

1. Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire. Cas particulier d'une variable aléatoire à densité.

2. Preuve : Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X et $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.
   La variable aléatoire $Y = aX + b$ est à densité et une densité f_Y de Y est donnée par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Exercice 1

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx.$$

1. Étude de la suite $(J_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Calculer J_1.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\geq 1}$.
2. Étude de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.
   (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
   $$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$
   (b) Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.
   (c) Déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in]0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X.
2. (a) Montrer que X possède des moments de tous ordres et, pour tout entier naturel n non nul, calculer $m_n(X)$ le moment d'ordre n de X.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \ln(X)$.
   (b) Étudier l'existence et éventuellement calculer la valeur de l'espérance de Y à l'aide de la loi de Y.
   (c) Faire de même à l'aide du théorème de transfert.

Colle 16

Intégration - Variables aléatoires à densité

Questions de cours

1. Définition et propriétés d'une densité d'une variable aléatoire à densité.
2. Preuve : L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 3

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$A = \int_2^{+\infty} \frac{t}{\ln(t)} dt, \qquad B = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}, \qquad C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}.$$

Exercice 4

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge et déterminer sa valeur.
2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2} e^{-|x|}$.
   (a) Montrer que f est paire.
   (b) Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.
3. (a) Montrer que, pour tout $x \leq 0$, $F(x) = \dfrac{1}{2} e^x$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $F(x) = 1 - \dfrac{1}{2} e^{-x}$.
4. On pose $Y = |X|$, ce qui signifie donc que Y est la valeur absolue de X. On admet que Y est une variable aléatoire à définie sur le même espace probabilisé que X. On note G la fonction de répartition de Y.
   (a) Déterminer $G(x)$ pour tout réel $x < 0$.
   (b) Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, on a : $G(x) = F(x) - F(-x)$. En déduire l'expression explicite de $G(x)$ en fonction de x.
   (c) Expliciter $G(x)$.

Exercice 5

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(t) dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt$.
   (b) En déduire un encadrement de $\ln(n!)$, puis de u_n, pour tout entier $n \geq 2$.
   (c) Qu'en déduire pour les suites $(\ln(n!))$ et $(\ln(n^n))$?

Colle 16

Intégration - Variables aléatoires à densité

Questions de cours

1. Formules sur les primitives usuelles.
2. Preuve : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.

Exercice 6

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt, \qquad B = \int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt, \qquad C = \int_3^{+\infty} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

Exercice 7

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}dx$ est convergente et donner sa valeur.
2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2(1+|x|)^2}$.
   (a) Montrer que f est paire.
   (b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.

3. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   (a) Déterminer $Y(\Omega)$.
   (b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.
   (c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par :
   $$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
   (d) Déterminer l'expression de g.

Exercice 8

Soit $x \in]0, 1[$.

1. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\displaystyle\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.
2. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0$.
3. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$, ainsi que l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.
