Colle 17

Variables aléatoires à densité
Applications linéaires

Questions de cours

1. Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire. Cas particulier d'une variable aléatoire à densité.

2. Preuve : f est injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0_E\}$.

Exercice 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in]0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X.

2. (a) Montrer que X possède des moments de tous ordres et, pour tout entier naturel n non nul, calculer $m_n(X)$ le moment d'ordre n de X.

   (b) En déduire l'espérance et la variance de X.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

4. (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \ln(X)$.

   (b) Étudier l'existence et éventuellement calculer la valeur de l'espérance de Y à l'aide de la loi de Y.

Exercice 2

On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et f l'application définie par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = M + {}^tM.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer $Ker(f)$. f est-elle injective ?

3. Déterminer $Im(f)$ et sa dimension.

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 3. Soit f l'application qui, à tout élément P de E associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(P))(x) = xP'(x) - P(x).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.

3. f est-il un automorphisme de E ?

Colle 17

Variables aléatoires à densité
Applications linéaires

Questions de cours

1. Définition et propriétés d'une densité d'une variable aléatoire à densité.
2. Preuve : Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$.

Exercice 4

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge et déterminer sa valeur.
2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$.
   (a) Montrer que f est paire.
   (b) Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.
3. (a) Montrer que, pour tout $x \leq 0$, $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{x}$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $F(x) = 1 - \dfrac{1}{2}e^{-x}$.
4. On pose $Y = |X|$, ce qui signifie donc que Y est la valeur absolue de X. On admet que Y est une variable aléatoire à définie sur le même espace probabilisé que X. On note G la fonction de répartition de Y.
   (a) Déterminer $G(x)$ pour tout réel $x < 0$.
   (b) Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, on a : $G(x) = F(x) - F(-x)$. En déduire l'expression explicite de $G(x)$ en fonction de x.
   (c) Expliciter $G(x)$.

Exercice 5

On considère l'application f définie, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$f((x_1, x_2)) = (4x_1 - 6x_2, 2x_1 - 3x_2)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Déterminer $Ker(f)$. En déduire le rang de f.
   (b) Déterminer une base de $Im(f)$.

Colle 17

Variables aléatoires à densité
Applications linéaires

Questions de cours

1. Noyau d'une application linéaire : définition et propriétés.
2. Preuve : Si $dim(E) = dim(F)$, alors : f bijective $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective.

Exercice 6

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}dx$ est convergente et donner sa valeur.
2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2(1+|x|)^2}$.
   (a) Montrer que f est paire.
   (b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.

3. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   (a) Déterminer $Y(\Omega)$.
   (b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.
   (c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par :
   $$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
   (d) Déterminer l'expression de g.

Exercice 7

Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour toute fonction polynômiale P de $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$f(P) = (P(0), P(1), P(2)).$$

1. (a) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Déterminer $Ker(f)$.
   (b) En déduire que f est un isomorphisme.
