Colle 17

Variables aléatoires à densité
Applications linéaires

Questions de cours

1. Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire. Cas particulier d'une variable aléatoire à densité.
2. Preuve : f est injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0_E\}$.

Exercice 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in]0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X.
2. (a) Montrer que X possède des moments de tous ordres et, pour tout entier naturel n non nul, calculer $m_n(X)$ le moment d'ordre n de X.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \ln(X)$.
   (b) Étudier l'existence et éventuellement calculer la valeur de l'espérance de Y à l'aide de la loi de Y.

Exercice 2

On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et f l'application définie par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = M + {}^tM.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $Ker(f)$. f est-elle injective ?
3. Déterminer $Im(f)$ et sa dimension.

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 3. Soit f l'application qui, à tout élément P de E associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(P))(x) = xP'(x) - P(x).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.
3. f est-il un automorphisme de E ?

Colle 17

Variables aléatoires à densité
Applications linéaires

Questions de cours

1. Définition et propriétés d'une densité d'une variable aléatoire à densité.
2. Preuve : Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$.

Exercice 4

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge et déterminer sa valeur.
2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$.
   (a) Montrer que f est paire.
   (b) Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.
3. (a) Montrer que, pour tout $x \leq 0$, $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{x}$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $F(x) = 1 - \dfrac{1}{2}e^{-x}$.
4. On pose $Y = |X|$, ce qui signifie donc que Y est la valeur absolue de X. On admet que Y est une variable aléatoire à définie sur le même espace probabilisé que X. On note G la fonction de répartition de Y.
   (a) Déterminer $G(x)$ pour tout réel $x < 0$.
   (b) Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, on a : $G(x) = F(x) - F(-x)$. En déduire l'expression explicite de $G(x)$ en fonction de x.
   (c) Expliciter $G(x)$.

Exercice 5

On considère l'application f définie, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$f((x_1, x_2)) = (4x_1 - 6x_2, 2x_1 - 3x_2)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Déterminer $Ker(f)$. En déduire le rang de f.
   (b) Déterminer une base de $Im(f)$.

Colle 17

Variables aléatoires à densité
Applications linéaires

Questions de cours

1. Noyau d'une application linéaire : définition et propriétés.
2. Preuve : Si $dim(E) = dim(F)$, alors : f bijective $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective.

Exercice 6

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx$ est convergente et donner sa valeur.
2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2(1+|x|)^2}$.
   (a) Montrer que f est paire.
   (b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.

3. On pose $Y = \ln(1 + |X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   (a) Déterminer $Y(\Omega)$.
   (b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.
   (c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par :
   $$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
   (d) Déterminer l'expression de g.

Exercice 7

Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour toute fonction polynômiale P de $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$f(P) = (P(0), P(1), P(2)).$$

1. (a) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Déterminer $Ker(f)$.
   (b) En déduire que f est un isomorphisme.

Exercice 8

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{n-1}{x^n} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

1. Vérifier que f est une densité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X admettant f comme densité et on dit que X suit une loi W de paramètre n, notée $W(n)$.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X.

3. (a) Montrer que X a une espérance $E(X)$ donnée par $E(X) = \dfrac{n-1}{n-2}$.
   (b) On appelle mode d'une variable à densité le réel x tel que $f(x)$ soit maximal. Déterminer le mode de X.
   (c) Déterminer le réel μ, appelé médiane de X, tel que $F(\mu) = \dfrac{1}{2}$.

4. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendante, et suivant toutes deux la loi $W(n)$.

   On considère les variables aléatoires $S = \max(X_1, X_2)$ et $I = \min(X_1, X_2)$ et on admet que S et I sont des variables aléatoires définies, elles aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

   (a) Déterminer la fonction de répartition de F_S de S.
   (b) En déduire que S est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_S de S.
   (c) En déduire que S a une espérance $E(S) = \dfrac{2(n-1)^2}{(n-2)(2n-3)}$.

5. Écrire la relation liant X_1, X_2, S et I et en déduire la valeur de $E(I)$.

6. (a) Déterminer la fonction de répartition de F_I de I.
   (b) En déduire que I suit aussi une loi du type W et préciser le paramètre de cette loi.
   (c) Retrouver sans calcul l'espérance de I.

Exercice 9

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

On considère également l'application f définie par : $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = JMJ$.

1. (a) Montrer que l'application f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer $f \circ f$. En déduire que l'application f est bijective. Préciser f^{-1}.

2. Montrer que : $\forall M, N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(MN) = f(M)f(N)$.

3. Montrer que (I, J, K, L) est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Soit F l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $f(M) = M$ et soit G l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $f(M) = -M$.

   (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que tout élément $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme : $M = M_+ + M_-$, avec $M_+ \in F$ et $M_- \in G$.
   (c) A titre d'exemple, déterminer les matrices A_+ et A_- lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

5. (a) Montrer que le produit de deux matrices appartenant à F appartient aussi à F. Que peut-on dire du produit de deux matrices appartenant à G ?
   (b) Si $M, N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, exprimer $(MN)_+$ et $(MN)_-$ en fonction de M_+, M_-, N_+ et N_-.