

Variables aléatoires à densité

Applications linéaires

Questions de cours

1. Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire. Cas particulier d'une variable aléatoire à densité.
2. Preuve : f est injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Exercice 1

On considère les matrices $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle que la famille $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1 + E_4$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_2 + E_3$.

Soit f l'application qui à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe la matrice $f(M) = \frac{a+d}{2}I + \frac{b+c}{2}J$.

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(b) Déterminer la matrice A de f dans la base \mathcal{B} .
2. (a) Déterminer $\text{Im}(f)$ et sa dimension. Quel est la dimension de $\text{Ker}(f)$?
(b) Déterminer $\text{Ker}(f)$.
(c) Justifier que f n'est pas un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. (a) Montrer que $f \circ f = f$.
(b) Retrouver à l'aide de la question précédente que f n'est pas un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{id}) = \text{Vect}(I, J)$.
5. (a) On considère la famille $\mathcal{C} = (E_1 - E_4, E_2 - E_3, I, J)$.
Justifier que \mathcal{C} est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(b) Déterminer la matrice D de f relativement à la base \mathcal{C} .
(c) Écrire la matrice P de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} puis donner une formule reliant A , D et P .

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in]0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X .
2. (a) Montrer que X possède des moments de tous ordres et, pour tout entier naturel n non nul, calculer $m_n(X)$ le moment d'ordre n de X .
(b) En déduire l'espérance et la variance de X .
3. Déterminer la fonction de répartition de X .
4. (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \ln(X)$.
(b) Étudier l'existence et éventuellement calculer la valeur de l'espérance de Y à l'aide de la loi de Y .

Colle 18

Variables aléatoires à densité Applications linéaires

Questions de cours

1. Définition et propriétés d'une densité d'une variable aléatoire à densité.
2. Preuve : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Exercice 3

Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans \mathbb{R}^3 définie par : $f(P) = (P(0), P(1), P(2))$.

1. (a) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans \mathbb{R}^3 .
(b) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et de \mathbb{R}^3 .
2. (a) Déterminer $\text{Ker}(f)$.
(b) En déduire que f est un isomorphisme.
3. On considère les polynômes $L_0(X) = (X - 1)(X - 2)$, $L_1(X) = X(X - 2)$ et $L_2(X) = X(X - 1)$.
(a) Montrer que la famille (L_0, L_1, L_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
(b) Déterminer la matrice de f dans la base (L_0, L_1, L_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ et la base canonique de \mathbb{R}^3 .
(c) Retrouver que f est un isomorphisme.

Exercice 4

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge et déterminer sa valeur.

2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

- (a) Montrer que f est paire.
- (b) Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X , définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , et admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X .

3. (a) Montrer que, pour tout $x \leq 0$, $F(x) = \frac{1}{2}e^x$.
(b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $F(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$.
4. On pose $Y = |X|$, ce qui signifie donc que Y est la valeur absolue de X . On admet que Y est une variable aléatoire à définie sur le même espace probabilisé que X . On note G la fonction de répartition de Y .
(a) Déterminer $G(x)$ pour tout réel $x < 0$.
(b) Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, on a : $G(x) = F(x) - F(-x)$. En déduire l'expression explicite de $G(x)$ en fonction de x .
(c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance.

Colle 18

Variables aléatoires à densité Applications linéaires

Questions de cours

1. Noyau d'une application linéaire : définition et propriétés.
2. Preuve : Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors : f bijective $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective.

Exercice 5

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 3. Soit f l'application qui, à tout élément P de E associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(P))(x) = xP'(x) - P(x).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E .
3. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
4. f est-il un automorphisme de E ?

Exercice 6

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \frac{n-1}{x^n} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

1. Vérifier que f est une densité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X admettant f comme densité et on dit que X suit une loi W de paramètre n , notée $W(n)$.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X .
3. (a) Montrer que X a une espérance $E(X)$ donnée par $E(X) = \frac{n-1}{n-2}$.
(b) On appelle mode d'une variable à densité le réel x tel que $f(x)$ soit maximal.
Déterminer le mode de X .
(c) Déterminer le réel μ , appelé médiane de X , tel que $F(\mu) = \frac{1}{2}$.
4. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendante, et suivant toutes deux la loi $W(n)$.

On considère les variables aléatoires $S = \max(X_1, X_2)$ et $I = \min(X_1, X_2)$ et on admet que S et I sont des variables aléatoires définies, elles aussi, sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

- (a) Déterminer la fonction de répartition de F_S de S .
 - (b) En déduire que S est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_S de S .
 - (c) En déduire que S a une espérance $E(S) = \frac{2(n-1)^2}{(n-2)(2n-3)}$.
5. Écrire la relation liant X_1, X_2, S et I et en déduire la valeur de $E(I)$.
 6. (a) Déterminer la fonction de répartition de F_I de I .
(b) En déduire que I suit aussi une loi du type W et préciser le paramètre de cette loi.
(c) Retrouver sans calcul l'espérance de I .

Colle 18

Variables aléatoires à densité Applications linéaires

Questions de cours

1. Image d'une application linéaire : définition et propriétés.
2. Preuve : $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 7

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

On considère également l'application f définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(M) = JMJ$.

1. (a) Montrer que l'application f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(b) Déterminer $f \circ f$. En déduire que l'application f est bijective. Préciser f^{-1} .
2. Montrer que : $\forall M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(MN) = f(M)f(N)$.
3. Montrer que (I, J, K, L) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Soit F l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $f(M) = M$ et soit G l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $f(M) = -M$.
(a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(b) Montrer que tout élément $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme : $M = M_+ + M_-$, avec $M_+ \in F$ et $M_- \in G$.
(c) A titre d'exemple, déterminer les matrices A_+ et A_- lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
5. (a) Montrer que le produit de deux matrices appartenant à F appartient aussi à F . Que peut-on dire du produit de deux matrices appartenant à G ?
(b) Si $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, exprimer $(MN)_+$ et $(MN)_-$ en fonction de M_+ , M_- , N_+ et N_- .

Exercice 8

On note f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x\sqrt{x}} & \text{si } x \in [1, +\infty[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Vérifier que f est une densité.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
3. Montrer que X ne possède pas d'espérance.
4. On pose $Z = \ln(X)$. Déterminer la fonction de répartition de Z et vérifier que Z suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.