Colle 19

# Applications linéaires - Lois à densité usuelles

## Questions de cours

1. Loi exponentielle : densité, fonction de répartition, espérance et variance.
2. Preuve : Fonction de répartition et espérance d'une variable aléatoire à densité $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

---

## Exercice 1

On considère les matrices $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On rappelle que la famille $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1 + E_4$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_2 + E_3$.
Soit $f$ l'application qui à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe la matrice $f(M) = \dfrac{a+d}{2}I + \dfrac{b+c}{2}J$.

1. (a) Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer la matrice $A$ de $f$ dans la base $\mathscr{B}$.
2. (a) Déterminer $Im(f)$ et sa dimension. Quel est la dimension de $Ker(f)$ ?
   (b) Déterminer $Ker(f)$.
   (c) Justifier que $f$ n'est pas un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. (a) Montrer que $f \circ f = f$.
   (b) Retrouver à l'aide de la question précédente que $f$ n'est pas un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $Ker(f - id) = Vect(I, J)$.
5. (a) On considère la famille $\mathscr{C} = (E_1 - E_4, E_2 - E_3, I, J)$.
   Justifier que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer la matrice $D$ de $f$ relativement à la base $\mathscr{C}$.
   (c) Écrire la matrice $P$ de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ puis donner une formule reliant $A$, $D$ et $P$.

---

## Exercice 2

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in ]0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

1. Montrer que $f$ peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire $X$.
2. (a) Montrer que $X$ possède des moments de tous ordres et, pour tout entier naturel $n$ non nul, calculer $m_n(X)$ le moment d'ordre $n$ de $X$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X$.
3. Déterminer la fonction de répartition de $X$.
4. (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \ln(X)$.
   (b) Étudier l'existence et éventuellement calculer la valeur de l'espérance de $Y$ à l'aide de la loi de $Y$.

---

Colle 19

# Applications linéaires - Lois à densité usuelles

## Questions de cours

1. Loi uniforme : densité, fonction de répartition, espérance et variance.
2. Preuve : Fonction de répartition et espérance d'une variable aléatoire à densité $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$.

---

## Exercice 3

Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(P) = (P(0), P(1), P(2))$.

1. (a) Montrer que $f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice de $f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Déterminer $Ker(f)$.
   (b) En déduire que $f$ est un isomorphisme.
3. On considère les polynômes $L_0(X) = (X-1)(X-2)$, $L_1(X) = X(X-2)$ et $L_2(X) = X(X-1)$.
   (a) Montrer que la famille $(L_0, L_1, L_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer la matrice de $f$ dans la base $(L_0, L_1, L_2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Retrouver que $f$ est un isomorphisme.

---

## Exercice 4

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge et déterminer sa valeur.
2. On considère la fonction $f$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$.
   (a) Montrer que $f$ est paire.
   (b) Montrer que $f$ peut être considérée comme une densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire $X$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et admettant $f$ comme densité. On note $F$ la fonction de répartition de $X$.
3. (a) Montrer que, pour tout $x \leq 0$, $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{x}$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $F(x) = 1 - \dfrac{1}{2}e^{-x}$.
4. On pose $Y = |X|$, ce qui signifie donc que $Y$ est la valeur absolue de $X$. On admet que $Y$ est une variable aléatoire à définie sur le même espace probabilisé que $X$. On note $G$ la fonction de répartition de $Y$.
   (a) Déterminer $G(x)$ pour tout réel $x < 0$.
   (b) Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, on a : $G(x) = F(x) - F(-x)$. En déduire l'expression explicite de $G(x)$ en fonction de $x$.
   (c) Reconnaître la loi de $Y$ et donner son espérance.

---

Colle 19

# Applications linéaires - Lois à densité usuelles

## Questions de cours

1. Noyau d'une application linéaire : définition et propriétés.
2. Preuve : Notons $\Phi$ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad \text{et} \qquad \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

---

## Exercice 5

On note $E$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 3. Soit $f$ l'application qui, à tout élément $P$ de $E$ associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(P))(x) = xP'(x) - P(x).$$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.
2. Déterminer la matrice de $f$ dans la base canonique de $E$.
3. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.
4. $f$ est-il un automorphisme de $E$ ?

---

## Exercice 6

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3 et $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{n-1}{x^n} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

1. Vérifier que $f$ est une densité.

On considère dorénavant une variable aléatoire $X$ admettant $f$ comme densité et on dit que $X$ suit une loi $W$ de paramètre $n$, notée $W(n)$.

2. Déterminer la fonction de répartition $F$ de $X$.
3. (a) Montrer que $X$ a une espérance $E(X)$ donnée par $E(X) = \dfrac{n-1}{n-2}$.
   (b) On appelle mode d'une variable à densité le réel $x$ tel que $f(x)$ soit maximal.
   Déterminer le mode de $X$.
   (c) Déterminer le réel $\mu$, appelé médiane de $X$, tel que $F(\mu) = \dfrac{1}{2}$.
4. Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendante, et suivant toutes deux la loi $W(n)$.

   On considère les variables aléatoires $S = \max(X_1, X_2)$ et $I = \min(X_1, X_2)$ et on admet que $S$ et $I$ sont des variables aléatoires définies, elles aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

   (a) Déterminer la fonction de répartition de $F_S$ de $S$.
   (b) En déduire que $S$ est une variable aléatoire à densité et donner une densité $f_S$ de $S$.
   (c) En déduire que $S$ a une espérance $E(S) = \dfrac{2(n-1)^2}{(n-2)(2n-3)}$.
5. Écrire la relation liant $X_1$, $X_2$, $S$ et $I$ et en déduire la valeur de $E(I)$.
6. (a) Déterminer la fonction de répartition de $F_I$ de $I$.
   (b) En déduire que $I$ suit aussi une loi du type $W$ et préciser le paramètre de cette loi.
   (c) Retrouver sans calcul l'espérance de $I$.

---

Colle 19

# Applications linéaires - Lois à densité usuelles

## Questions de cours

1. Image d'une application linéaire : définition et propriétés.
2. Preuve : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Alors :
$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \quad \Rightarrow \quad Y = a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b]).$$

---

## Exercice 7

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

On considère également l'application $f$ définie par : $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = JMJ$.

1. (a) Montrer que l'application $f$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer $f \circ f$. En déduire que l'application $f$ est bijective. Préciser $f^{-1}$.
2. Montrer que : $\forall M, N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(MN) = f(M)f(N)$.
3. Montrer que $(I, J, K, L)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Soit $F$ l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $f(M) = M$ et soit $G$ l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $f(M) = -M$.
   (a) Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que tout élément $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme : $M = M_+ + M_-$, avec $M_+ \in F$ et $M_- \in G$.
   (c) A titre d'exemple, déterminer les matrices $A_+$ et $A_-$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
5. (a) Montrer que le produit de deux matrices appartenant à $F$ appartient aussi à $F$. Que peut-on dire du produit de deux matrices appartenant à $G$ ?
   (b) Si $M, N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, exprimer $(MN)_+$ et $(MN)_-$ en fonction de $M_+$, $M_-$, $N_+$ et $N_-$.

---

## Exercice 8

On note $f$ la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} & \text{si } x \in [1, +\infty[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Vérifier que $f$ est une densité.
2. Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.
3. Montrer que $X$ ne possède pas d'espérance.
4. On pose $Z = \ln(X)$. Déterminer la fonction de répartition de $Z$ et vérifier que $Z$ suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

---