

Colle 2

Révisions de première année Compléments sur les suites

Questions de cours

1. Coefficients binomiaux : Définition, propriétés et formule du binôme de Newton.
2. Théorèmes des suites monotones et des suites adjacentes.
3. Preuve : Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, alors

$$e^{u_n} - 1 \sim u_n, \quad \ln(1 + u_n) \sim u_n, \quad (1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n.$$

Exercice 1

Déterminer un équivalent simple puis la limite des suites :

$$u_n = (n + 3 \ln(n))e^{-n-1}, \quad v_n = \frac{n^3(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^3 + 1}}, \quad w_n = \ln(2 - e^{-1/n}).$$

Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 3$, on pose $f_n(x) = x^n + x^2 + 2x - 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution positive x_n . Vérifier que $x_n \in [0, \frac{1}{2}]$.
2. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$.
En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 3}$.
3. En déduire qu'elle converge vers une limite qu'on notera ℓ .
4. En utilisant la question 1., montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = 0$.
5. En utilisant la relation $f_n(x_n) = 0$, en déduire la valeur de ℓ .

Exercice 3

1. Montrer que l'équation $xe^x = n$ admet une unique solution réelle pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notée u_n .
2. Étudier les variations et la convergence de (u_n) .
3. Montrer que $u_n \sim \ln(n)$.
4. Déterminer un équivalent simple de $\ln(n) - u_n$.

Exercice 4

Calculer les sommes suivantes :

$$(1) \sum_{k=n}^{2n} k^2 \qquad (2) \sum_{k=0}^n \frac{2^k \binom{n}{k}}{k+1} \qquad (3) \sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{i+j}$$

Colle 2

Révisions de première année

Compléments sur les suites

Questions de cours

1. Fonctions logarithme et exponentielle : Définition, propriétés et représentation graphique.
2. Suites arithmétiques et géométriques : Définition et formules explicites.
3. Preuve : Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) et (t_n) quatre suites telles que $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$. Alors :

$$u_n v_n \sim w_n t_n, \quad \frac{u_n}{v_n} \sim \frac{w_n}{t_n}, \quad u_n^k \sim w_n^k \text{ (où } k \in \mathbb{N}\text{)}.$$

Exercice 5

Déterminer un équivalent simple puis la limite des suites :

$$u_n = \frac{n^2(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^2+1}}, \quad v_n = n^2 \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right), \quad w_n = n^{1/n} - 1.$$

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(t) = \ln(1+t) + \frac{t^2}{1+t^2}$.

1. (a) Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.
(b) En déduire l'allure de la courbe représentative de f .
2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation $(E_n) : f(t) = \frac{1}{n}$
 - (a) Montrer que l'équation (E_n) admet une solution α_n et une seule.
 - (b) Déterminer le sens de variation puis expliciter la limite de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(\alpha_n)}{\alpha_n}$ puis en déduire que $\alpha_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 7

Calculer les sommes suivantes :

$$(1) \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k} \qquad (2) \sum_{k=0}^n (n-k) \binom{n}{k} \qquad (3) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$$

Exercice 8

On considère les deux suites (x_n) et (y_n) définies par :

$$x_0 = 1, y_0 = 9 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 6x_n - y_n \\ y_{n+1} = 5x_n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (x_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
2. En déduire une expression de x_n , puis de y_n , en fonction de n .

Colle 2

Révisions de première année

Compléments sur les suites

Questions de cours

1. Fonctions partie entière et valeur absolue : Définitions, propriétés et représentation graphique.
2. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : Définition et formules explicites.
3. Preuve : Si deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, alors elles sont de même nature :
 - Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) converge vers un réel ℓ , alors (u_n) converge également vers ℓ .
 - Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) diverge vers $\pm\infty$, alors (u_n) diverge également vers $\pm\infty$.

Exercice 9

Déterminer un équivalent simple puis la limite des suites :

$$u_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{n + 1}, \quad v_n = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1}, \quad w_n = n(\sqrt[n]{3} - 1).$$

Exercice 10

Pour tout entier naturel n , on définit sur \mathbb{R}_+^* la fonction f_n par $f_n(x) = nx + \ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée x_n .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x_n < 1$.
3. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
4. En déduire la monotonie de la suite et sa convergence vers une limite ℓ .
5. Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.

Exercice 11

Calculer les sommes suivantes :

$$(1) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) \qquad (2) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \qquad (3) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$$

Exercice 12

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \frac{u_n}{3^n}$ est une suite arithmético-géométrique.
2. En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n .

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$.

1. Vérifier que la suite (u_n) est bien définie.
2. Étudier la convergence de la suite (u_n) .
3. Montrer que $u_n \sim \sqrt{n}$.

Colle 2

Révisions de première année Compléments sur les suites

Questions de cours

1. Coefficients binomiaux : Définition, propriétés et formule du binôme de Newton.
2. Théorèmes des suites monotones et des suites adjacentes.
3. Preuve : Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, alors

$$e^{u_n} - 1 \sim u_n, \quad \ln(1 + u_n) \sim u_n, \quad (1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n.$$

Exercice 14

Déterminer un équivalent simple puis la limite des suites :

$$u_n = (n + 3 \ln(n))e^{-n-1}, \quad v_n = \frac{n^3(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^3 + 1}}, \quad w_n = \ln(2 - e^{-1/n}).$$

Exercice 15

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4 + \frac{\ln(u_n)}{4}$.

1. Soit $f(x) = 4 + \frac{\ln(x)}{4}$. Étudier la fonction f et montrer que $[1, e^2]$ est stable par f .
2. Montrer que f possède un unique point fixe dans l'intervalle $[1, e^2]$ noté α .
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et appartient à l'intervalle $[1, e^2]$.
4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.
 (b) En déduire alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
 (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
5. (a) Déterminer un entier N tel que : $\forall n \geq N, |u_n - \alpha| \leq 10^{-6}$.
 (b) En déduire un programme en langage Scilab permettant d'obtenir une approximation de α à 10^{-6} près.

Exercice 16

Calculer les sommes suivantes :

$$(1) \sum_{k=n}^{2n} k^2$$

$$(2) \sum_{k=0}^n \frac{2^k \binom{n}{k}}{k+1}$$

$$(3) \sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{i+j}$$

Exercice 17

1. Montrer que l'équation $xe^x = n$ admet une unique solution réelle pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notée u_n .
2. Étudier les variations et la convergence de (u_n) .
3. Montrer que $u_n \sim \ln(n)$.
4. Déterminer un équivalent simple de $\ln(n) - u_n$.