Colle 22

Équations différentielles
Convergence et approximation

Questions de cours

1. Ensemble des solutions d'un système différentiel $X' = AX$ lorsque A est diagonalisable.
2. Preuve : Inégalité de Markov (démonstration dans le cas discret et dans le cas continu).

Exercice 1

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$(E) :\ y' - 3y = t^2e^{3t}.$$

1. Donner toutes les solutions de l'équation homogène associée.
2. Soit P une fonction polynômiale.
   (a) Justifier que la fonction $y_0 : t \mapsto P(t)e^{3t}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si on a, pour tout réel t, $P'(t) = t^2$.
   (b) En déduire une solution particulière de (E).
3. Conclure en donnant l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 2

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. (a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.
   (b) On note G la fonction de répartition de X. Déterminer $G(x)$ selon que $x \geq 1$ ou $x < 1$.
2. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) On note G_n la fonction de répartition de M_n. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x.
   (b) On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$ et F_n sa fonction de répartition.
   Montrer que $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$ si $x \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $F_n(x) = 0$ sinon.
3. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. (a) Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.
   (b) Donner un équivalent de $\ln(1 + u)$ lorsque u est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Conclure que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité Y dont on donnera la loi.

Colle 22

Équations différentielles
Convergence et approximation

Questions de cours

1. Ensemble des solutions d'une équation différentielle $y' + ay = 0$.
2. Preuve : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev + Loi faible des grands nombres.

Exercice 3

On considère le système différentiel suivant : $(S) : \begin{cases} x' = 2x - y - z + e^t \\ y' = 3x + z + 2e^t - 1 \\ z' = -3x + y - e^t + 1 \end{cases}$

1. Expliciter les matrices A et $B(t)$ telles que le système s'écrive $X'(t) = AX(t) + B(t)$.
2. On pose : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Calculer PQ et QAP. Que peut-on en déduire ?
3. On pose $Z(t) = P^{-1}X(t)$. Montrer que :
$$X'(t) = AX(t) + B(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z'(t) = DZ(t) + P^{-1}B(t).$$
4. Résoudre l'équation différentielle $y' - y = e^t$.

   On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto cte^t$.
5. Déterminer alors toutes les solutions du système différentiel $Z'(t) = DZ(t) + P^{-1}B(t)$.
6. En déduire les solutions du système différentiel (S).

Exercice 4

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par :
$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2}$$

1. Vérifier que la fonction f est paire.
2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.
3. On considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

   Déterminer la fonction de répartition de X.
4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, de même densité f. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:
$$T_n = \max(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad U_n = T_n - \ln(n).$$
   (a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(U_n \leq x) = \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

   (c) En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Colle 22

Équations différentielles
Convergence et approximation

Questions de cours

1. Ensemble des solutions d'une équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.
2. Preuve : Convergence en loi de lois binomiales vers la loi de Poisson.

Exercice 5

On considère le système différentiel linéaire suivant : $(S) : \begin{cases} x_1'' = x_1 + x_2 \\ x_2'' = x_1 + x_2 \end{cases}$

1. (a) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
   (b) On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et on pose $Y = P^{-1}X$. Montrer que : $X'' = AX \Leftrightarrow Y'' = DY$.
   (c) Résoudre les équations différentielles (E_1) : $y'' = 0$ et (E_2) : $y'' = 2y$.
   (d) En déduire les solutions de (S).
2. (a) Déterminer les états d'équilibre de (S).
   (b) Les trajectoires associées au système (S) sont-elles convergentes ? Les points d'équilibres sont-ils stables ?

Exercice 6

Soit V une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}(1)$. On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire.

1. (a) On note F_W la fonction de répartition de W. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_W(x) = e^{-e^{-x}}$
   (b) En déduire que W est une variable aléatoire à densité.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi $\mathcal{E}(1)$.
2. (a) Soit $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. On admet que Y_n est une variable aléatoire.
   Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :
   $$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$
   (b) Montrer que Y_n est à densité et en déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.
3. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$ et F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.
   (a) Justifier que, pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.
   (b) Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.
   (c) Montrer que, pour tout réel x, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$.
   (d) Démontrer que (Z_n) converge en loi vers W.
