Colle 23

# Convergence et approximation
# Fonctions de deux variables

## Questions de cours

Convergence en loi de lois binomiales vers la loi de Poisson.

---

## Exercice 1

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes finies à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et $Y(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$, où $n$ et $m$ sont deux entiers de $\mathbb{N}^*$.
Pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on pose : $p_{i,j} = P((X = i) \cap (Y = j))$.

Soit $F_X$ et $F_Y$ les deux fonctions définies par : $F_X(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(X = i)x^i$ et $F_Y(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} P(Y = j)x^j$.

Soit $Z = (X, Y)$ et $G_Z$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $G_Z(x, y) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} p_{i,j}x^i y^j$.

1. Donner la valeur de $G_Z(1, 1)$ et exprimer les espérance de $X$, $Y$ et $XY$, puis la covariance de $(X, Y)$ à l'aide des dérivées partielles premières et secondes de $G_Z$ au point $(1, 1)$.

2. Soit $f$ une fonction de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j}x^i y^j$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

   (a) On suppose que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = 0$.
   Montrer que pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on a $a_{i,j} = 0$.

   (b) En déduire que $X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $G_Z(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ (on pourra poser $a_{i,j} = p_{i,j} - P(X = i)P(Y = j)$).

3. Une urne contient des jetons portant chacun une des lettres $A$, $B$ ou $C$. La proportion des jetons portant la lettre $A$ est $p$, celle des jetons portant la lettre $B$ est $q$, et celle des jetons portant la lettre $C$ est $r$, où $p$, $q$ et $r$ sont trois réels strictement positifs vérifiant $p + q + r = 1$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue $n$ tirages d'un jeton avec remise dans cette urne. On note $X$ (resp. $Y$) la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés portant la lettre $A$ (resp. $B$) à l'issue de ces $n$ tirages.

   (a) Quelles sont les lois de $X$ et $Y$ respectivement? Déterminer $F_X$ et $F_Y$.

   (b) Déterminer la loi de $Z$. En déduire $G_Z$.

   (c) Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes?

   (d) Calculer la covariance de $(X, Y)$. Le signe de cette covariance était-il prévisible?

---

## Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A\,{}^tAA\,{}^tAA = I$, où $I$ est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice $A$ est symétrique.

2. Déterminer $A$.

---

Colle 23

# Convergence et approximation
# Fonctions de deux variables

## Questions de cours
Inégalité de Markov (démonstration dans le cas discret et dans le cas continu).

---

## Exercice 3
Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient $a, b, c$ des réels tels que $0 < a < b < 1$ et $c \geq 0$. Soit $f_{a,b,c}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b,c}(x) = \begin{cases} c\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq a, \\ \dfrac{c}{2}\left(1 + \dfrac{x-1}{1-b}\right) & \text{si } b \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Décrire la courbe de $f_{a,b,c}$ dans le cas général et tracer la courbe de $f_{\frac{1}{3},\frac{2}{3},4}$.
2. Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   Déterminer $c$ pour que $f_{\frac{1}{n},1-\frac{1}{n},c}$ soit une densité de probabilité.

   On note désormais pour $n \geq 2$, $f_n$ la densité trouvée et $X_n$ une variable aléatoire admettant $f_n$ comme densité.
3. Montrer que $(X_n)_{n\geq 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire $Y$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
4. Soient $a, b, c$ tels que $f_{a,b,c}$ définisse une densité de probabilité. On suppose que $b = 0.8$ et que la fonction Python `simul` permet de simuler une variable $X$ dont une densité serait $f_{a,b,c}$. Que pensez-vous du script suivant ?

```
W = 0
for i in range(1000):
  S = simul()
  if (S<0.8) and (S>W):
    W = S
return(W)
```

5. (a) Déterminer la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ de $f_n(x)$ pour $x$ réel différent de 0 et 1.

   (b) Quelle est l'espérance $E(X_n)$ de $X_n$ ? Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$ ?

   On pourra utiliser le résultat suivant : $\displaystyle\int_b^1 x f_{a,b,c}(x)dx = \frac{c}{12}(1-b)(b+2)$.

   (c) Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$, $E(Y)$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$.

   Commentez.

---

## Exercice 4
Soient $a$ et $b$ deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

1. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur $a$ et $b$ pour que la série de terme général $u_n$ converge.
2. Écrire un script Python indiquant si la série converge et permettant, en cas de divergence, de déterminer le plus petit entier $n$ tel que $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_n\right| > 100$.
3. En cas de convergence, calculer sa somme.

---

Colle 23

# Convergence et approximation
# Fonctions de deux variables

## Questions de cours

Preuve : Inégalité de Markov (démonstration dans le cas discret et dans le cas continu).

---

## Exercice 5

Soit $f$ la fonction définie pour tout couple $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y.$$

1. (a) Calculer les dérivées partielles premières de $f$.
   (b) En déduire que le seul point critique de $f$ est $A = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de $f$.
   (b) Montrer que $f$ présente un minimum local en $A$ et donner la valeur $m$ de ce minimum.
3. (a) Développer $2(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{2}(y - \frac{1}{6})^2$.
   (b) En déduire que $m$ est le minimum global de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. On considère la fonction $g$ définie pour tout couple $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ par :
$$g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$
   (a) Utiliser la question 3. pour établir que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) \geq -\frac{1}{6}$.
   (b) En déduire que $g$ possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

---

## Exercice 6

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t$ de $\mathbb{R}$, par :

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2}$$

1. Vérifier que la fonction $f$ est paire.
2. Montrer que $f$ est une densité d'une variable aléatoire réelle.
3. On considère une variable aléatoire réelle $X$ à densité, de densité $f$.
   Déterminer la fonction de répartition de $X$.
4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, de même densité $f$. On pose, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ :
$$T_n = \max(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad U_n = T_n - \ln(n).$$
   (a) Déterminer, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de $T_n$.
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(U_n \leq x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.
   (c) En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

---

Colle 23

# Convergence et approximation
# Fonctions de deux variables

## Questions de cours

Preuve : Inégalité de Bienaymé-Tchebychex + Loi faible des grands nombres.

---

## Exercice 7

On considère l'application $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x)$, ainsi que la fonction $f$ des variables $x$ et $y$ définie par :

$$\forall (x, y) \in ]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \ f(x, y) = xy + \ln(x)\ln(y).$$

1. Montrer l'existence d'un unique réel $\alpha$ strictement positif tel que $\varphi(\alpha) = 0$.
   Justifier que : $\sqrt{2} < \alpha < 2$.
2. Extrema de $f$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
   (a) Justifier que $f$ est de classe $C^2$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $f$ et prouver que le point de coordonnées $(1/\alpha, 1/\alpha)$ est l'unique point critique de $f$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
   (c) La fonction $f$ présente-t-elle un extremum local sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ ? Si oui, en donner sa nature (maximum ou minimum).

---

## Exercice 8

Soit $V$ une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}(1)$. On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que $W$ est aussi une variable aléatoire.

1. (a) On note $F_W$ la fonction de répartition de $W$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_W(x) = e^{-e^{-x}}$
   (b) En déduire que $W$ est une variable aléatoire à densité.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi $\mathcal{E}(1)$.
2. (a) Soit $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. On admet que $Y_n$ est une variable aléatoire.
   Montrer que la fonction de répartition $F_{Y_n}$ de $Y_n$ est définie par :
   $$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$
   (b) Montrer que $Y_n$ est à densité et en déduire une densité $f_{Y_n}$ de $Y_n$.
3. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$ et $F_{Z_n}$ la fonction de répartition de $Z_n$.
   (a) Justifier que, pour tout réel $x$, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.
   (b) Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.
   (c) Montrer que, pour tout réel $x$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$.
   (d) Démontrer que $(Z_n)$ converge en loi vers $W$.

---

Colle 23

# Convergence et approximation
# Fonctions de deux variables

## Questions de cours

Preuve : Convergence en loi de lois binomiales vers la loi de Poisson.

---

## Exercice 9

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = 9x^2 + 8xy + 3y^2 + x - 2y.$$

1. Montrer que $f$ admet un seul extremum local sur $\mathbb{R}^2$. Quel est sa nature ?
2. (a) Calculer $f(-1/2, 1)$ et retrouver le résultat de la question précédente en développant :

$$3\left(y + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

   (b) Quelle information supplémentaire cela nous apporte-t-il ?

---

## Exercice 10

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. (a) Vérifier que la fonction $g$ qui à tout réel $x$ associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire $X$.

   (b) On note $G$ la fonction de répartition de $X$. Déterminer $G(x)$ selon que $x \geq 1$ ou $x < 1$.

2. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que $X$. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que $M_n$ est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   (a) On note $G_n$ la fonction de répartition de $M_n$. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction $G$ puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de $x$.

   (b) On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$ et $F_n$ sa fonction de répartition.

   Montrer que $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$ si $x \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $F_n(x) = 0$ sinon.

3. Déterminer, pour tout réel $x$ négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

4. (a) Soit $x$ un réel strictement positif. Vérifier que, dès que $n$ est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

   (b) Donner un équivalent de $\ln(1+u)$ lorsque $u$ est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel $x$ strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

5. Conclure que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité $Y$ dont on donnera la loi.

---