Colle 23

Convergence et approximation
Fonctions de deux variables

Questions de cours

Inégalité de Markov (démonstration dans le cas discret et dans le cas continu).

Exercice 1

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient a, b, c des réels tels que $0 < a < b < 1$ et $c \geq 0$. Soit $f_{a,b,c}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b,c}(x) = \begin{cases} c\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq a, \\ \dfrac{c}{2}\left(1 + \dfrac{x-1}{1-b}\right) & \text{si } b \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Décrire la courbe de $f_{a,b,c}$ dans le cas général et tracer la courbe de $f_{\frac{1}{3},\frac{2}{3},4}$.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   Déterminer c pour que $f_{\frac{1}{n},1-\frac{1}{n},c}$ soit une densité de probabilité.

   On note désormais pour $n \geq 2$, f_n la densité trouvée et X_n une variable aléatoire admettant f_n comme densité.
3. Montrer que $(X_n)_{n\geq 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y quand n tend vers $+\infty$.
4. Soient a, b, c tels que $f_{a,b,c}$ définisse une densité de probabilité. On suppose que $b = 0.8$ et que la fonction Python `simul` permet de simuler une variable X dont une densité serait $f_{a,b,c}$. Que pensez-vous du script suivant ?

```
W = 0
for i in range(1000):
  S = simul()
  if (S<0.8) and (S>W):
    W = S
return(W)
```

5. (a) Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $f_n(x)$ pour x réel différent de 0 et 1.

   (b) Quelle est l'espérance $E(X_n)$ de X_n ? Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$?

   On pourra utiliser le résultat suivant : $\displaystyle\int_b^1 x f_{a,b,c}(x)dx = \frac{c}{12}(1-b)(b+2)$.

   (c) Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$, $E(Y)$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$.

   Commentez.

Exercice 2

Soient a et b deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

1. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur a et b pour que la série de terme général u_n converge.
2. Écrire un script Python indiquant si la série converge et permettant, en cas de divergence, de déterminer le plus petit entier n tel que $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_n\right| > 100$.
3. En cas de convergence, calculer sa somme.

Colle 23

Convergence et approximation
Fonctions de deux variables

Questions de cours

Preuve : Inégalité de Markov (démonstration dans le cas discret et dans le cas continu).

Exercice 3

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y.$$

1. (a) Calculer les dérivées partielles premières de f.
   (b) En déduire que le seul point critique de f est $A = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
   (b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.
3. (a) Développer $2(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{2}(y - \frac{1}{6})^2$.
   (b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$

   (a) Utiliser la question 3. pour établir que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) \geq -\frac{1}{6}$.
   (b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 4

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par :

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2}$$

1. Vérifier que la fonction f est paire.
2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.
3. On considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.
   Déterminer la fonction de répartition de X.
4. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, de même densité f. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$T_n = \max(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad U_n = T_n - \ln(n).$$

   (a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(U_n \leq x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.
   (c) En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Colle 23

Convergence et approximation
Fonctions de deux variables

Questions de cours

Preuve : Inégalité de Bienaymé-Tchebychex + Loi faible des grands nombres.

Exercice 5

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x)$, ainsi que la fonction f des variables x et y définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[,\ f(x, y) = xy + \ln(x)\ln(y).$$

1. Montrer l'existence d'un unique réel α strictement positif tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

   Justifier que : $\sqrt{2} < \alpha < 2$.

2. Extrema de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

   (a) Justifier que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f et prouver que le point de coordonnées $(1/\alpha, 1/\alpha)$ est l'unique point critique de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

   (c) La fonction f présente-t-elle un extremum local sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$? Si oui, en donner sa nature (maximum ou minimum).

Exercice 6

Soit V une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}(1)$. On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire.

1. (a) On note F_W la fonction de répartition de W. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_W(x) = e^{-e^{-x}}$

   (b) En déduire que W est une variable aléatoire à densité.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi $\mathcal{E}(1)$.

2. (a) Soit $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. On admet que Y_n est une variable aléatoire.
   Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

   (b) Montrer que Y_n est à densité et en déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

3. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$ et F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.

   (a) Justifier que, pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.

   (b) Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.

   (c) Montrer que, pour tout réel x, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$.

   (d) Démontrer que (Z_n) converge en loi vers W.

Colle 23

Convergence et approximation
Fonctions de deux variables

Questions de cours

Preuve : Convergence en loi de lois binomiales vers la loi de Poisson.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = 9x^2 + 8xy + 3y^2 + x - 2y.$$

1. Montrer que f admet un seul extremum local sur $\mathbb{R}^2$. Quel est sa nature ?
2. (a) Calculer $f(-1/2, 1)$ et retrouver le résultat de la question précédente en développant :

$$3\left(y + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

   (b) Quelle information supplémentaire cela nous apporte-t-il ?

Exercice 8

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. (a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.

   (b) On note G la fonction de répartition de X. Déterminer $G(x)$ selon que $x \geq 1$ ou $x < 1$.
2. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   (a) On note G_n la fonction de répartition de M_n. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x.

   (b) On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$ et F_n sa fonction de répartition.

   Montrer que $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$ si $x \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $F_n(x) = 0$ sinon.
3. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. (a) Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

   (b) Donner un équivalent de $\ln(1+u)$ lorsque u est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Conclure que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité Y dont on donnera la loi.